TD 14 – Entraînement probabiliste

1 – Échauffement

Exercice 1. (*Examen 2008-2009*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement ditribuées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. On fixe un réel $\alpha > 0$ et, pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n^{(\alpha)} := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i^\alpha}.$$

1. On suppose que $\alpha > 1/2$. Montrer que $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ converge dans L^2.
   Indication. On pourra utiliser le critère de Cauchy.
2. On suppose maintenant que $\alpha = 1/2$.
   (a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\xi \in [-\eta, \eta]$, on ait

   $$\left| \ln \phi_{X_1}(\xi) + \frac{\sigma^2 \xi^2}{2} \right| \leq \varepsilon \xi^2.$$

   (b) En déduire que la suite

   $$\left(\frac{S_n^{(1/2)}}{\sqrt{\ln n}} \right)_{n\geq 1}$$

   converge en loi vers une limite dont on précisera la loi.

Corrigé.

1. On utilise le critère de Cauchy : soit $1 \leq m \leq n$, on a

   $$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=m}^{n} \frac{X_i}{i^\alpha} \right)^2 \right] = \sum_{i=m}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_i}{i^\alpha} \right)^2 \right] = \sigma^2 \sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i^{2\alpha}},$$

   en utilisant l'indépendance et le fait que les X_i sont centrées. Pour $\alpha > 1/2$, la série $\sum_{i\geq 1} i^{-2\alpha}$ converge donc

   $$\sup_{n\geq m\geq N} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=m}^{n} \frac{X_i}{i^\alpha} \right)^2 \right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

   ce qui montre que $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ converge dans L^2 (car L^2 est complet).
2. Pour cette question, on utilise une méthode similaire à la démonstration du TCL.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

(a) On sait que X_1 admet un moment d'ordre 2, donc ϕ_{X_1} est 2 fois dérivable en 0 et $\phi'_{X_1}(0) = i\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\phi''_{X_1}(0) = -\mathbb{E}[X_1^2] = -\sigma^2$. Avec un développement de Taylor-Young en 0, on obtient

$$\phi_{X_1}(\xi) = 1 - \frac{\sigma^2\xi^2}{2} + o\left(\xi^2\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2} + o\left(\xi^2\right)\right),$$

quand $\xi \to 0$. Ainsi, on a

$$\ln\phi_{X_1}(\xi) + \frac{\sigma^2\xi^2}{2} = o\left(\xi^2\right),$$

quand $\xi \to 0$, ce qui montre le résultat souhaité.

(b) Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi) = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k\xi}{k^{1/2}\sqrt{\ln n}}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n}\phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k\ln n}}\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ donné par la question précédente. Pour n suffisamment grand, on a $\xi/\sqrt{k\ln n} \le \eta$ pour tout $k \ge 1$ et donc

$$\begin{aligned}\left|\ln\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi) + \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right| &\le \left|\sum_{k=1}^{n}\ln\phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k\ln n}}\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n} - \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right| \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\varepsilon\frac{\xi^2}{k\ln n} + \frac{\sigma^2\xi^2}{2}\left|\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon\xi^2\end{aligned}$$

En prenant ensuite $\varepsilon \to 0$, on en déduit que

$$\ln\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\sigma^2\xi^2}{2},$$

et, par le théorème de Lévy faible, que $S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

2 – Se focaliser sur ses espérances

Exercice 2. (*Examen 2015-2016*) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_n)_{n\ge1}$ une suite d'événements indépendants. Pour $n \ge 1$, on pose $a_n := \mathbb{P}(A_n)$ et

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad S_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}.$$

On suppose que $b_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $S_n/b_n \to 1$ dans L^2 quand $n \to \infty$.
2. Pour tout $k \ge 1$, on pose $n_k := \inf\{n \in \mathbb{N} : b_n \ge k^2\}$. Montrer que $k^2 \le b_{n_k} < k^2 + 1$ et que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Montrer que $S_{n_k}/b_{n_k} \to 1$ presque sûrement quand $k \to \infty$.
4. En déduire que $S_n/b_n \to 1$ presque sûrement quand $n \to \infty$.

Corrigé.

1. On a

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{b_n} - 1\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{b_n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(\frac{\mathbb{1}_{A_k}}{b_n}\right) \le \frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_k}^2\right] = \frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k = \frac{1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc cela montre la convergence souhaitée.

2. On note tout d'abord que n_k est bien défini car $b_n \to \infty$. Par définition, $b_{n_k} \geq k^2$ et $b_{n_k - 1} < k^2$. Or $a_{n_k} \leq 1$, donc on a $b_{n_k} < k^2 + 1$. En particulier, $b_{n_k} < (k+1)^2$ donc $n_k < n_{k+1}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. On a, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \operatorname{Var}\left(\frac{S_{n_k}}{b_{n_k}}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{b_{n_k}} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 k^2},$$

qui est une suite sommable en k. Par Borel–Cantelli, on en déduit que presque sûrement, à partir d'un certain rang,

$$\left|\frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} - 1\right| < \varepsilon$$

et donc, presque sûrement,

$$1 - \varepsilon \leq \liminf_{k \to \infty} \frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} \leq \limsup_{k \to \infty} \frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} \leq 1 + \varepsilon.$$

On conclut en prenant une suite $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}} \downarrow 0$.
4. Soit $n \geq 1$. Il existe un unique $k \geq 1$ tel que $n_k \leq n < n_{k+1}$. Comme $(S_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ et $(n_k)_{k \geq 1}$ sont croissantes, on a

$$\frac{S_{n_k}}{b_{n_{k+1}}} \leq \frac{S_n}{b_n} \leq \frac{S_{n_{k+1}}}{b_{n_k}}$$

et, comme $k^2 \leq b_{n_k} < k^2 + 1$,

$$\frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} \frac{k^2}{k^2+1} \leq \frac{S_n}{b_n} \leq \frac{S_{n_{k+1}}}{b_{n_{k+1}}} \frac{k^2+1}{k^2}.$$

Sur l'événement de convergence de $(S_{n_k}/b_{n_k})_{k \geq 1}$ vers 1, on a donc $S_n/b_n \to 1$ quand $n \to \infty$ (car alors $k \to \infty$). On a donc montré que $S_n/b_n \to 1$ presque sûrement quand $n \to \infty$.

3 – Un peu de marche

Exercice 3. (*Réflexions multiples*) Soit $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ une marche aléatoire simple symétrique d'horizon $n \geq 1$. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on note $\tau_x := \min\{k \in [\![0, n]\!] : S_k = x\}$, où par convention $\min \emptyset = \infty$.

1. Soit $b \geq 1$ et $c > -b$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = c, S_0 > -b, \ldots, S_n > -b)$.
2. Soit $a, b \geq 1$ et $-b < c < a$. Montrer que

$$\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a < n, \forall k \in [\![\tau_a, n]\!], S_k > -b) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2a+2b+c}{2}}\right).$$

3. Soit $a, b \geq 1$ et $-b < c < a$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que

$$\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a = \tau_{-b} = \infty) = \frac{1}{2^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\right).$$

Corrigé.

1. On a

$$\begin{aligned}
&\#\{S_n = c, S_0 > -b, \ldots, S_n > -b\} \\
&= \#\{\text{chemins de } (0,b) \text{ à } (n, c+b) \text{ ne touchant pas } 0\} \\
&= \#\{\text{chemins de } (0,b) \text{ à } (n, c+b)\} - \#\{\text{chemins de } (0,b) \text{ à } (n, c+b) \text{ touchant } 0\} \\
&= \#\{\text{chemins de } (0,b) \text{ à } (n, c+b)\} - \#\{\text{chemins de } (0,-b) \text{ à } (n, c+b)\},
\end{aligned}$$

par le principe de réflexion. On obtient ainsi

$$\mathbb{P}(S_n = c, S_0 > -b, \ldots, S_n > -b) = \mathbb{P}(S_n = c) - \mathbb{P}(S_n = a + 2b) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+c+2b}{2}}\right).$$

2. En reflétant le chemin à partir de l'instant τ_a, par rapport à l'axe horizontal de niveau a on a

$$\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a < n, \forall k \in [\![\tau_a, n]\!], S_k > -b) = \mathbb{P}(S_n = 2a - c, \tau_a < n, \forall k \in [\![\tau_a, n]\!], S_k < 2a + b).$$

On remarque que avant l'instant τ_a, la trajectoire est forcément $< 2a + b$, puis que si $S_n = 2a - c$ alors on a forcément $\tau_a < n$. Cela donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a < n, \forall k \in [\![\tau_a, n]\!], S_k > -b) &= \mathbb{P}(S_n = 2a - c, \forall k \in [\![0, n]\!], S_k < 2a + b) \\ &= \mathbb{P}(S_n = c - 2a, \forall k \in [\![0, n]\!], S_k > -(2a + b)) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+c-2a}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2a+2b+c}{2}}\right) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2a+2b+c}{2}}\right),\end{aligned}$$

en utilisant la question 1.

3. Cette question est assez lourde à rédiger, et bien plus claire avec un dessin. On s'intéresse à la probabilité complémentaire, c'est-à-dire qu'une trajectoire touche le niveau a ou le niveau $-b$ avant de finir en c. On décompose en fonction du nombre de fois que cette trajectoire travers la bande $[-b, a]$. Puis en partant de l'extrémité on utilise des réflexions par rapport au niveau a et $-b$ alternativement de la fin de la trajectoire, jusqu'à arriver à quelque chose de calculable (c'est-à-dire de la forme de la question 1.).

On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a = \tau_{-b} = \infty) &= \mathbb{P}(S_n = c) - \mathbb{P}(S_n = c, \tau_a < \infty \text{ ou } \tau_{-b} < \infty) \\ &= \mathbb{P}(S_n = c) - \mathbb{P}(S_n = c, \text{ le niveau } a \text{ est touché en dernier}) \\ &\quad - \mathbb{P}(S_n = c, \text{ le niveau } b \text{ est touché en dernier}).,\end{aligned}$$

en séparant en fonction de laquelle des deux "barrières" en a et $-b$ a été touchée en dernier.

On va se concentrer sur le cas où on touche a en dernier, l'autre s'obtenant par symétrie. On va séparer en fonction du nombre de traversée de la bande $[-b, a]$. Pour cela, on pose $T_1 := \tau_a$ puis pour $k \geq 1$,

$$U_k := \inf\{i \geq T_k : S_i = -b\} \quad \text{et} \quad T_{k+1} := \inf\{i \geq U_k : S_i = a\}.$$

Les instants U_k correspondent à la fin d'une traversée de la bande de a vers $-b$ et les instants T_k (pour $k \geq 2$) correspondent à la fin d'une traversée de la bande de $-b$ vers a. On remarque que $T_1 \leq U_1 \leq T_2 \leq U_2 \leq \dots$, où les inégalités sont en fait strictes jusqu'à ce que les instants soient infinis. On a alors

$$\mathbb{P}(S_n = c, \text{ le niveau } a \text{ est touché en dernier}) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_n = c, T_k \leq n \text{ et } U_k = \infty).$$

Soit $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = c, T_k \leq n, U_k = \infty) &= \mathbb{P}(S_n = c, T_k \leq n, \forall i \in [\![T_k, n]\!], S_i > -b) \\ &= \mathbb{P}(S_n = 2a - c, T_k \leq n, \forall i \in [\![T_k, n]\!], S_i < 2a + b),\end{aligned} \tag{1}$$

par réflexion de la trajectoire entre les instant T_k et n par rapport au niveau a (comme à la question 2.).

Dans le but de procéder par récurrence, on va montrer que, pour tous $j \geq 2$ et $y > x > a$, on a

$$\mathbb{P}\Big(S_n = x, T_j \leq n, \forall i \in [\![T_j, n]\!], S_i < y\Big) = \mathbb{P}\Big(S_n = 2(a+b) + x, T_{j-1} \leq n, \forall i \in [\![T_{j-1}, n]\!], S_i < 2(a+b) + y\Big) \tag{2}$$

Pour cela, on commence par remarquer que, sur l'événement $\{T_j \leq n\}$, on a $U_j \leq n$ et $\forall i \in [\![U_j, T_j]\!]$, $S_i \leq a < y$. Réciproquement, sur $\{U_j \leq n, S_n = x\}$, on a $T_j \leq n$ car $x > a$. Cela nous assure que

$$\mathbb{P}\Big(S_n = x, T_j \leq n, \forall i \in [\![T_j, n]\!], S_i < y\Big) = \mathbb{P}\Big(S_n = x, U_j \leq n, \forall i \in [\![S_j, n]\!], S_i < y\Big).$$

On effectue alors une réflexion de la trajectoire entre les instant S_j et n par rapport au niveau $-b$, ce qui donne

$$\mathbb{P}\Big(S_n = x, U_j \le n, \forall i \in [\![S_j, n]\!], S_i < y\Big) = \mathbb{P}\Big(S_n = -2b - x, U_j \le n, \forall i \in [\![S_j, n]\!], S_i > -2b - y\Big).$$

Puis par des arguments similaires sur ce qui a lieu entre les instants T_{j-1} et U_j et en effectuant réflexion de la trajectoire entre les instant T_{j-1} et n par rapport au niveau a, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(S_n = -2b - x, U_j \le n, \forall i \in [\![S_j, n]\!], S_i > -2b - y\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(S_n = -2b - x, T_{j-1} \le n, \forall i \in [\![T_{j-1}, n]\!], S_i > -2b - y\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(S_n = 2a - (-2b - x), T_{j-1} \le n, \forall i \in [\![T_{j-1}, n]\!], S_i < 2a - (-2b - y)\Big),
\end{aligned}$$

et cela montre (2).

On revient à (1). En utilisant $k-1$ fois (2), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(S_n = 2a - c, T_k \le n, \forall i \in [\![T_k, n]\!], S_i < 2a + b\right)\\
&= \mathbb{P}\left(S_n = 2(k-1)(a+b) + 2a - c, T_1 \le n, \forall i \in [\![T_1, n]\!], S_i < 2(k-1)(a+b) + 2a + b\right).
\end{aligned}$$

Comme $T_1 = \tau_a$, on a, par la fin du calcul de la question 2.,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(S_n = 2(k-1)(a+b) + 2a - c, T_1 \le n, \forall i \in [\![T_1, n]\!], S_i < 2(k-1)(a+b) + 2a + b\right)\\
&= \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+2(k-1)(a+b)+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2[2(k-1)(a+b)+2a+b]-[2(k-1)(a+b)+2a-c]}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on a montré que

$$\mathbb{P}\left(S_n = c, \text{ le niveau } a \text{ est touché en dernier}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k\ge 1}\left(\binom{n}{\frac{n+2(k-1)(a+b)+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}}\right)$$

et par symétrie, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_n = c, \text{ le niveau } b \text{ est touché en dernier}\right) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k\ge 1}\left(\binom{n}{\frac{n+2(k-1)(a+b)+2b+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)-c}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k\le -1}\left(\binom{n}{\frac{n-2k(a+b)-2a+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n-2k(a+b)-c}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k\le -1}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}}\right),
\end{aligned}$$

en utilisant que $(S_k)_{0\le k\le n}$ et $(-S_k)_{0\le k\le n}$ ont même loi, puis en changeant k en $-k$.

Enfin, en revenant à la première égalité, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(S_n = c, \tau_a = \tau_b = \infty\right)\\
&= \mathbb{P}\left(S_n = c\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{k\ge 1}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2(k-1)(a+b)+2a-c}{2}}\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{k\le -1}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(S_n = c\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \frac{1}{2^n}\sum_{k\ge 0}\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}} - \frac{1}{2^n}\sum_{k\le -1}\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\right),
\end{aligned}$$

en changeant k en $k-1$, puis en remarquant que $\mathbb{P}\left(S_n = c\right) = 2^{-n}\binom{n}{(n+c)/2}$ est exactement le terme manquant à la somme sur $k \in \mathbb{Z}^*$

4 – Donner son maximum

Exercice 4. (*Examen 2007-2008*) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$M_n := \max\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{U_n}}\right)$$

1. Calculer la fonction de répartition de M_n.
2. Soit $p > 0$. Déterminer les valeurs de p telles que M_n a un moment d'ordre p fini.
3. Montrer que $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers une variable aléatoire dont on précisera la fonction de répartition et la densité.

Corrigé.

1. Pour $x < 1$, on a $F_{M_n}(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, on a

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} \leq x\right)^n = \mathbb{P}\left(U_1 \geq \frac{1}{x^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n.$$

2. Comme $M_n \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[M_n^p\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(M_n^p \geq y\right) \mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(M_n \geq y^{1/p}\right) \mathrm{d}y.$$

Or on a , pour $y \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(M_n \geq y^{1/p}\right) = 1 - F_{M_n}(y^{1/p}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{y^{2/p}}\right)^n \sim_{y\to\infty} \frac{n}{y^{2/p}},$$

donc $\mathbb{E}[M_n^p] < \infty$ si et seulement si $p < 2$.

3. On passe par les fonctions de répartition. Pour $x \leq 0$, on a $F_{M_n/\sqrt{n}}(x) = 0$. Pour $x > 0$, on a, à partir d'un certain rang tel que $x\sqrt{n} \geq 1$,

$$F_{M_n/\sqrt{n}}(x) = F_{M_n}(x\sqrt{n}) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

On pose $F(x) := \mathrm{e}^{-1/x^2} \mathbb{1}_{x>0}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors F est continue croissante et tend vers 0 en $-\infty$ et en 1 en $+\infty$ donc c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z, et donc $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers Z.
En outre, on a $F_Z(x) = \int_{-\infty}^x p_Z(z)\mathrm{d}z$, avec

$$p(z) := F_Z'(z) = \frac{2}{z^3}\mathrm{e}^{-1/z^2}\mathbb{1}_{x>0},$$

donc Z admet p pour densité.

5 – Exploser ses records

Exercice 5. (*Convergence en loi mais pas en proba*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $0 < \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. On pose $S_n := X_1 + \dots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Soit $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice. En utilisant la loi du 0–1 de Kolmogorov, montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} = -\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} = +\infty, \quad \text{presque sûrement.}$$

2. En déduire que la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

Corrigé.

1. Par symétrie, il suffit de montrer la limite supérieure. On considère $A>0$. On a, pour $N\in\mathbb{N}$,

$$\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}\geq A\right\}=\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{X_N+\cdots+X_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}\geq A\right\}=\bigcap_{p\geq 1}\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{X_N+\cdots+X_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}\geq A-\frac{1}{p}\right\}$$
$$=\bigcap_{p\geq 1}\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k}\left\{\frac{X_N+\cdots+X_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}>A\right\}\in\mathcal{F}_N,$$

et, comme cela est vrai pour tout $N\in\mathbb{N}$, cet événement appartient à la tribu asymptotique de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. Par la loi du 0-1 de Kolmogorov, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}>A\right)\in\{0,1\}.$$

En outre, on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}>A\right)\geq\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}>A\right\}\right)=\lim_{k\to\infty}\downarrow\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq k}\left\{\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}>A\right\}\right)$$
$$\geq\limsup_{k\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{S_{\varphi(k)}}{\sqrt{\varphi(k)}}>A\right)$$

Or, d'après le TCL, la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire N de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. La variable N ayant une fonction de répartition continue partout et jamais égale à 1, on a donc

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}>A\right)=\mathbb{P}(N>A)>0,$$

ce qui implique que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}\geq A\right)>0.$$

Comme cette probabilité est dans $\{0,1\}$, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}}\geq A\right)=1.$$

En considérant une suite $(A_k)_{k\geq 1}\uparrow+\infty$, on en déduit le résultat.

2. Si la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X, alors on peut extraire une sous-suite $(S_{\varphi(n)}/\sqrt{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que $S_{\varphi(n)}/\sqrt{\varphi(n)}\to X$ p.s. Or par la question précédente $(S_{\varphi(n)}/\sqrt{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ diverge presque sûrement, donc $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

6 – Augmenter sa précision

Exercice 6. (*Contrôle des fluctuations d'une marche aléatoire*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telle qu'il existe $\delta>0$ tel que $\mathbb{E}[e^{\delta|X_1|}]<\infty$. On pose $S_n:=X_1+\cdots+X_n$ pour tout $n\geq 1$.

1. En étendant la définition de la fonction caractéristique de X_1 au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, montrer que l'on a

$$\mathbb{E}\left[e^{S_n/\sqrt{n}}\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{\sigma^2/2},$$

où $\sigma^2:=\mathbb{E}[X_1^2]$.

2. Soit $\alpha > 1$. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \le \alpha, \quad \text{presque sûrement.}$$

3. En déduire que

$$\frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{presque sûrement.}$$

Remarque. Le bonne renormalisation a été trouvée en 1924 par Khinchine, pour les sommes de variables de Bernoulli, puis a été étendue en 1941 par Hartman et Wintner, au cas général où les X_i suivent une loi centrée et de variance finie σ^2. Ils ont montré le résultat suivant

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -1 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1, \quad \text{presque sûrement,}$$

appelé la *loi du logarithme itéré*.

Corrigé.

1. On pourrait vouloir appliquer la convergence en loi du TCL mais la fonction $x \mapsto e^x$ n'est pas bornée donc on ne peut pas.
   On va plutôt recalquer la démonstration mais en remplaçant la fonction caractéristique par la fonction φ définie par
   $$\forall t \in [-\delta,\delta], \quad \varphi(t) := \mathbb{E}\left[e^{tX_1}\right],$$
   qui est bien à valeurs finies car $\mathbb{E}[e^{tX_1}] \le \mathbb{E}[e^{\delta|X_1|}]$. Cela revient à $\varphi(t) = \phi_{X_1}(it)$ (l'hypothèse $\mathbb{E}[e^{\delta|X_1|}] < \infty$ permet en fait de prolonger ϕ_{X_1} sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \in [-\delta,\delta]\}$ en une fonction analytique).
   Par récurrence, on montre que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\delta,\delta[$ et que
   $$\forall t \in]-\delta,\delta[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{(k)}(t) := \mathbb{E}\left[X_1^k e^{tX_1}\right],$$
   en utilisant que $\mathbb{E}[|X_1^k e^{tX_1}|] < \infty$ pour tous $t \in]-\delta,\delta[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$: en effet il existe une constante $C > 0$ (dépendant de k et t) telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x^k e^{tx}| \le Ce^{\delta|x|}$.
   En particulier, on a le développement suivant quand $t \to 0$,
   $$\varphi(t) = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o\left(t^2\right).$$
   Ainsi, on obtient
   $$\mathbb{E}\left[e^{S_n/\sqrt{n}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{X_1/\sqrt{n}}\right]^n = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\sigma^2/2}.$$
2. On a, quand $n \to \infty$, par l'inégalité de Markov,
   $$\mathbb{P}\left(S_n \ge \alpha\sqrt{n}\ln n\right) = \mathbb{P}\left(e^{S_n/\sqrt{n}} \ge n^\alpha\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[e^{S_n/\sqrt{n}}\right]}{n^\alpha} \sim \frac{e^{\sigma^2/2}}{n^\alpha}$$
   donc, comme $\alpha > 1$,
   $$\sum_{n\ge 2} \mathbb{P}\left(S_n \ge \alpha\sqrt{n}\ln n\right) < \infty.$$
   Par Borel-Cantelli, on en déduit que
   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\ln n} \le \alpha, \quad \text{presque sûrement.}$$
   Par symétrie, on a aussi
   $$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\ln n} \ge -\alpha, \quad \text{presque sûrement}$$
   et les deux combinés donnent le résultat.

3. Si l'on prend α le plus petit possible on ne peut obtenir que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \leq 1, \quad \text{presque sûrement}$$

ce qui n'est pas satisfaisant.
Ce qu'il faut remarquer ici c'est que la limite ne dépend pas de σ^2 et ça c'est louche ! On considère donc $A > 0$ et $(AS_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire de loi de saut la loi de AX_1 qui est centrée et vérifie $\mathbb{E}[e^{\delta A^{-1}|AX_1|}] < \infty$ avec $\delta A^{-1} > 0$. On peut donc lui appliquer le résultat précédent qui donne

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|AS_n|}{\sqrt{n}\ln n} \leq 1, \quad \text{presque sûrement}$$

ou encore

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \leq \frac{1}{A}, \quad \text{presque sûrement}$$

qui donne le résultat souhaité avec $A \to \infty$.

7 – Passage au vestiaire

Exercice 7. (*Théorème de Portmanteau*) Soit $X, X_0, X_1, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique (E,d) muni de sa tribu borélienne, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On veut montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X ;

(ii) pour tout $f : E \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ quand $n \to \infty$;

(iii) pour tout fermé $F \subset E$, on a $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$;

(iv) pour tout ouvert $G \subset E$, on a $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in F)$;

(v) pour tout borélien $A \subset E$ tel que $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$, on a $\mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A)$ quand $n \to \infty$.

Ce résultat est appelé *théorème de Portmanteau*, mais il n'y a pas de mathématicien portant le nom de Portmanteau : il s'agit d'un canular possiblement initié par Billingsley qui, dans l'un de ses livres, attribue le théorème à Jean-Pierre Portmanteau, en faisant référence à un article de 1915 des Annales de l'Université Felletin ayant pour titre « Espoir pour l'ensemble vide ? ».

1. Montrer les implications faciles : (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) puis (iii) + (iv) $\Rightarrow$ (v).
2. Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (iii).
3. En considérant tout d'abord $f \in \mathcal{C}_b(E)$ positive et en utilisant que $\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_0^\infty \mathbb{P}(f(X_n) > y)\,\mathrm{d}y$, montrer que (v) $\Rightarrow$ (i).

Corrigé.

1. (i) $\Rightarrow$ (ii) : la convergence en loi implique la convergence $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ si f est continue bornée donc en particulier si f est lipschitzienne bornée.
(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) : il suffit de passer au complémentaire.
(iii) + (iv) $\Rightarrow$ (v) : on rappelle que $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ et donc, si $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X \in \overline{A}\right) = \mathbb{P}\left(X \in \mathring{A}\right).$$

On a ainsi, par (iv),

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n \in \mathring{A}\right) \geq \mathbb{P}\left(X \in \mathring{A}\right) = \mathbb{P}(X \in A)$$

et, par (iii),

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n \in \overline{A}\right) \leq \mathbb{P}\left(X \in \overline{A}\right) = \mathbb{P}(X \in A),$$

ce qui montre que $\mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A)$.

2. Supposons (ii). Soit F un fermé. On pose, pour $k \geq 1$,

$$f_k \colon x \in E \mapsto 0 \vee (1 - kd(x,F)),$$

qui est bornée par 1 et k-lipschitzienne. Donc, par (ii), on a $\mathbb{E}[f_k(X_n)] \to \mathbb{E}[f_k(X)]$ pour tout $k \geq 1$. Soit $k \geq 1$, on a $f_k \geq \mathbb{1}_F$, donc

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_k(X_n)] = \mathbb{E}[f_k(X)]$$

Or $f_k \downarrow \mathbb{1}_F$ quand $k \to \infty$, donc, par convergence dominée, $\mathbb{E}[f_k(X)] \to \mathbb{P}(X \in F)$. donc en prenant $k \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F).$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}_b(E)$, on peut supposer f positive (quitte à considérer f^+ puis f^-). On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_0^\infty \mathbb{P}(f(X_n) > y)\,\mathrm{d}y = \int_0^M \mathbb{P}(X_n \in \{f > y\})\,\mathrm{d}y,$$

en posant $M := \|f\|_\infty$. On a aussi la même relation avec X au lieu de X_n.
Montrons que $\mathbb{P}(X \in \partial\{f > y\}) = 0$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$. Comme f est continue, $\{f > y\}$ est ouvert et $\{f \geq y\}$ est un fermé contenant $\{f > y\}$ donc $\partial\{f > y\} \subset \{f = y\}$. En outre, on a, par Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X \in \{f = y\})\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x\in\{f=y\}}\,\mathrm{d}P_X(x)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{f(x)=y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}P_X(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{f(x)\})\,\mathrm{d}P_X(x) = 0,\end{aligned}$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $y \mapsto \mathbb{P}(X \in \{f = y\})$ est une fonction positive d'intégrale nulle, donc elle est nulle presque partout.
Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X \in \partial\{f > y\}) = 0$ donc, par (v), on a

$$\mathbb{P}(X_n \in \{f > y\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \in \{f > y\}).$$

En outre, on peut dominer par 1 qui est intégrable sur $[0, M]$ et on obtient par convergence dominée

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_0^M \mathbb{P}(X_n \in \{f > y\})\,\mathrm{d}y \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^M \mathbb{P}(X \in \{f > y\})\,\mathrm{d}y = \mathbb{E}[f(X)].$$

8 – Assurer la survie du club

Exercice 8. (*Processus de Galton-Watson*) Soit $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu_0 + \mu_1 < 1$. Le *processus de Galton-Watson* $(Z_n)_{n\geq 0}$ est défini récursivement par $Z_0 := 1$ et, pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)},$$

où les variables aléatoires $(X_j^{(n)})_{j,n\geq 0}$ sont i.i.d. de loi μ. Ainsi, $(Z_n)_{n\geq 0}$ modélise l'évolution d'une population dont à chaque instant n les individus meurent en donnant naissance à des nombres d'enfants i.i.d. de loi μ. On introduit la *fonction génératrice* ψ associée à μ :

$$\psi(s) := \sum_{n\geq 0} \mu_n s^n, \quad s \in [0,1].$$

On note finalement $m := \sum_{n\geq 0}\mu_n n$ la moyenne du nombre d'enfants et $q := \mathbb{P}(\exists n\in\mathbb{N} : Z_n = 0)$ la probabilité que la population s'éteigne au bout d'un certain temps.
La question, que se sont posée Bienaymé en 1845 puis Galton et Watson en 1874, est la suivante : quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la population ne s'éteigne jamais ? L'objectif ici est de démontrer leur résultat : $q < 1 \Leftrightarrow m > 1$.
Bien qu'ayant démontré ce résultat plus tôt, Bienaymé n'a pas laissé son nom à ce fameux processus. Ultime injustice, la démonstration de Galton et Watson était fausse.

1. Montrer que ψ est strictement croissante, que ψ' est strictement croissante et que $\psi(1) = 1$.
2. Pour $s \in [0,1]$, on note $\psi_n(s) := \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Montrer que $\psi_{n+1} = \psi_n \circ \psi$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(T < \infty)$ est le plus petit point fixe de ψ. Conclure.

Corrigé.

1. Pas de difficulté en dérivant sous le signe somme.
2. On démontre aisément par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_j^{(k)} : j \geq 0, 0 \leq k \leq n-1)$. Ainsi Z_n est indépendant de $\sigma(X_j^{(n)} : j \geq 0)$.
   On obtient alors
$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(s) &= \mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{k} X_j^{(n)}} \mathbb{1}_{\{Z_n=k\}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\,\mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{k} X_j^{(n)}}\right] \qquad \text{car } Z_n \text{ et } (X_1^{(n)},\ldots,X_k^{(n)}) \text{ sont indépendants} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\,\mathbb{E}\left[s^{X_1^{(n)}}\right]^k \qquad \text{car } X_1^{(n)},\ldots,X_k^{(n)} \text{ sont iid} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\,\psi(s)^k \\
&= \psi_n(\psi(s)).
\end{aligned}$$
   D'où le résultat.
3. La probabilité d'extinction q est la réunion croissante des événements $\{Z_n = 0\}$. En remarquant que $\psi_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, il s'ensuit que q est la limite de $\psi^{(n)}(0)$ lorsque $n \to \infty$.
   Lorsque $m \leq 1$, on introduit la fonction $h(s) = \psi(s) - s$ qui vérifie, pour $0 \leq s < 1$ $h'(s) = \psi'(s) - 1 < \psi'(1) - 1 \leq 0$. Ainsi h est strictement décroissante sur $[0,1]$ avec $h(1) = 0$. On en déduit que $\psi(t) > t$ pour tout $t \in [0,1)$. Lorsque $m > 1$, on démontre de manière similaire que que $\psi(s) = s$ admet une unique solution sur $[0,1)$. Il est alors classique de montrer que la suite $\psi^{(n)}(0)$ converge vers le plus petit point fixe de ψ sur $[0,1]$ lorsque $n \to \infty$.

9 – Après l'effort, le réconfort

Exercice 9. (*Épiphanie*) Lors des vœux du directeur au Pôt, n galettes sont servies, chacune contenant une fève et étant coupée en p parts. Au moment de vous servir, il reste $p_1, \ldots, p_n$ parts dans chaque galette respectivement. En outre, comme chaque personne qui a trouvé une fève porte immédiatement une couronne, vous savez qu'exactement k fèves ont été trouvées. Votre objectif est de maximiser votre probabilité de trouver une fève.

1. Quand $k = n-1$ dans quelle galette devez-vous tirer ?
2. Et quand $k = 0$?

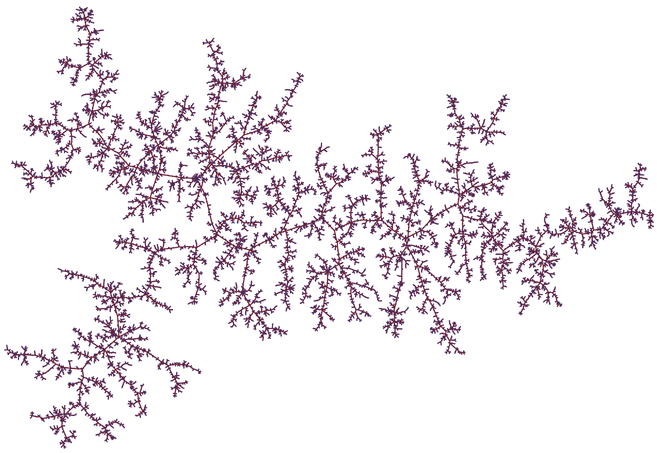
3. En général, est-ce qu'il y a intérêt à tirer dans une galette qui n'est ni la plus grande, ni la plus petite ?

Corrigé. Un corrigé plus complet sera mis en ligne bientôt, mais voici quelques conseils pour être prêt pour la galette de l'ENS.

1. Il faut tirer dans la plus grande (ou une des plus grande si plusieurs galettes sont de taille maximale). Pour le montrer, il faut faire un petit calcul, ce n'est pas complètement évident a priori.
2. Il faut tirer dans la plus petite. Ici c'est assez évident.
3. Oui ça peut arriver.

   Par exemple si $k = 1$ et qu'une galette est vide alors il faut tirer dans la plus petite parmi les non vides : on se ramène au cas du 2. (ce n'est du coup pas très intéressant).

   Mais ça peut aussi arriver avec aucune galette vide : par exemple avec $n = 3$, $k = 1$, $p_1 = 1$, $p_1 = \lfloor p/2 \rfloor$, $p_3 = p$. Faire le calcul pour le montrer.



Arbre de Galton-Watson critique conditionné à avoir une grande taille donnée (par Igor Kortchemski)

Fin