TD 14 – Entraînement probabiliste

1 – Échauffement

Exercice 1. (*Examen 2008-2009*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement ditribuées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. On fixe un réel $\alpha > 0$ et, pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n^{(\alpha)} := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i^\alpha}.$$

1. On suppose que $\alpha > 1/2$. Montrer que $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ converge dans L^2.
   Indication. On pourra utiliser le critère de Cauchy.
2. On suppose maintenant que $\alpha = 1/2$.
   (a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\xi \in [-\eta, \eta]$, on ait
   $$\left| \ln \phi_{X_1}(\xi) + \frac{\sigma^2 \xi^2}{2} \right| \leq \varepsilon \xi^2.$$
   (b) En déduire que la suite
   $$\left(\frac{S_n^{(1/2)}}{\sqrt{\ln n}} \right)_{n\geq 1}$$
   converge en loi vers une limite dont on précisera la loi.

2 – Se focaliser sur ses espérances

Exercice 2. (*Examen 2015-2016*) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n := \mathbb{P}(A_n)$ et

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad S_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}.$$

On suppose que $b_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $S_n/b_n \to 1$ dans L^2 quand $n \to \infty$.
2. Pour tout $k \geq 1$, on pose $n_k := \inf\{n \in \mathbb{N} : b_n \geq k^2\}$. Montrer que $k^2 \leq b_{n_k} < k^2 + 1$ et que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Montrer que $S_{n_k}/b_{n_k} \to 1$ presque sûrement quand $k \to \infty$.
4. En déduire que $S_n/b_n \to 1$ presque sûrement quand $n \to \infty$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

3 – Un peu de marche

Exercice 3. (*Réflexions multiples*) Soit $(S_k)_{0\le k\le n}$ une marche aléatoire simple symétrique d'horizon $n\ge 1$. Pour $x\in\mathbb{Z}$, on note $\tau_x := \min\{k\in[\![0,n]\!] : S_k = x\}$, où par convention $\min\emptyset = \infty$.

1. Soit $b\ge 1$ et $c>-b$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n=c, S_0>-b,\dots,S_n>-b)$.
2. Soit $a,b\ge 1$ et $-b<c<a$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(S_n=c, \tau_a<n, \forall k\in[\![\tau_a,n]\!], S_k>-b\right) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2a+2b+c}{2}}\right).$$
3. Soit $a,b\ge 1$ et $-b<c<a$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que
$$\mathbb{P}\left(S_n=c, \tau_a=\tau_{-b}=\infty\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\right).$$

4 – Donner son maximum

Exercice 4. (*Examen 2007-2008*) Soit $(U_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n\ge 1$, on pose
$$M_n := \max\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{U_n}}\right)$$

1. Calculer la fonction de répartition de M_n.
2. Soit $p>0$. Déterminer les valeurs de p telles que M_n a un moment d'ordre p fini.
3. Montrer que $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi quand $n\to\infty$ vers une variable aléatoire dont on précisera la fonction de répartition et la densité.

5 – Exploser ses records

Exercice 5. (*Convergence en loi mais pas en proba*) Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X_1]=0$ et $0<\mathbb{E}[X_1^2]<\infty$. On pose $S_n := X_1+\cdots+X_n$ pour tout $n\ge 1$.

1. Soit $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une extractrice. En utilisant la loi du 0–1 de Kolmogorov, montrer que
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} = -\infty \quad\text{et}\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} = +\infty, \quad\text{presque sûrement.}$$
2. En déduire que la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\ge1}$ ne converge pas en probabilité.

6 – Augmenter sa précision

Exercice 6. (*Contrôle des fluctuations d'une marche aléatoire*) Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telle qu'il existe $\delta>0$ tel que $\mathbb{E}[e^{\delta|X_1|}]<\infty$. On pose $S_n := X_1+\cdots+X_n$ pour tout $n\ge1$.

1. En étendant la définition de la fonction caractéristique de X_1 au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, montrer que l'on a
$$\mathbb{E}\left[e^{S_n/\sqrt{n}}\right]\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\sigma^2/2},$$
où $\sigma^2 := \mathbb{E}[X_1^2]$.

2. Soit $\alpha > 1$. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \le \alpha, \quad \text{presque sûrement.}$$

3. En déduire que

$$\frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{presque sûrement.}$$

Remarque. Le bonne renormalisation a été trouvée en 1924 par Khinchine, pour les sommes de variables de Bernoulli, puis a été étendue en 1941 par Hartman et Wintner, au cas général où les X_i suivent une loi centrée et de variance finie σ^2. Ils ont montré le résultat suivant

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -1 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1, \quad \text{presque sûrement,}$$

appelé la *loi du logarithme itéré*.

7 – Passage au vestiaire

Exercice 7. (*Théorème de Portmanteau*) Soit $X, X_0, X_1, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique (E,d) muni de sa tribu borélienne, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On veut montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X ;

(ii) pour tout $f : E \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ quand $n \to \infty$;

(iii) pour tout fermé $F \subset E$, on a $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \le \mathbb{P}(X \in F)$;

(iv) pour tout ouvert $G \subset E$, on a $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \ge \mathbb{P}(X \in F)$;

(v) pour tout borélien $A \subset E$ tel que $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$, on a $\mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A)$ quand $n \to \infty$.

Ce résultat est appelé *théorème de Portmanteau*, mais il n'y a pas de mathématicien portant le nom de Portmanteau : il s'agit d'un canular possiblement initié par Billingsley qui, dans l'un de ses livres, attribue le théorème à Jean-Pierre Portmanteau, en faisant référence à un article de 1915 des Annales de l'Université Felletin ayant pour titre « Espoir pour l'ensemble vide ? ».

1. Montrer les implications faciles : (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) puis (iii) + (iv) $\Rightarrow$ (v).
2. Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (iii).
3. En considérant tout d'abord $f \in \mathcal{C}_b(E)$ positive et en utilisant que $\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_0^\infty \mathbb{P}(f(X_n) > y)\,\mathrm{d}y$, montrer que (v) $\Rightarrow$ (i).

8 – Assurer la survie du club

Exercice 8. (*Processus de Galton-Watson*) Soit $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu_0 + \mu_1 < 1$. Le *processus de Galton-Watson* $(Z_n)_{n\ge0}$ est défini récursivement par $Z_0 := 1$ et, pour $n \ge 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)},$$

où les variables aléatoires $(X_j^{(n)})_{j,n\ge0}$ sont i.i.d. de loi μ. Ainsi, $(Z_n)_{n\ge0}$ modélise l'évolution d'une population dont à chaque instant n les individus meurent en donnant naissance à des nombres d'enfants i.i.d. de loi μ. On introduit la *fonction génératrice* ψ associée à μ :

$$\psi(s) := \sum_{n\ge0} \mu_n s^n, \quad s \in [0,1].$$

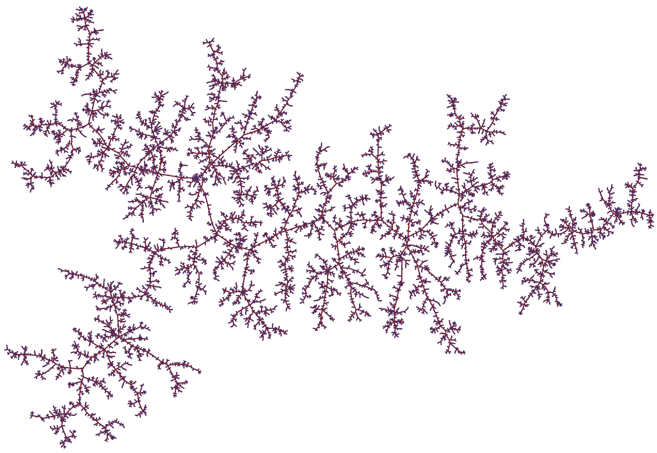
On note finalement $m := \sum_{n\geq 0} \mu_n n$ la moyenne du nombre d'enfants et $q := \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0)$ la probabilité que la population s'éteigne au bout d'un certain temps.
La question, que se sont posée Bienaymé en 1845 puis Galton et Watson en 1874, est la suivante : quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la population ne s'éteigne jamais ? L'objectif ici est de démontrer leur résultat : $q < 1 \Leftrightarrow m > 1$.
Bien qu'ayant démontré ce résultat plus tôt, Bienaymé n'a pas laissé son nom à ce fameux processus. Ultime injustice, la démonstration de Galton et Watson était fausse.

1. Montrer que ψ est strictement croissante, que ψ' est strictement croissante et que $\psi(1) = 1$.
2. Pour $s \in [0,1]$, on note $\psi_n(s) := \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Montrer que $\psi_{n+1} = \psi_n \circ \psi$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(T < \infty)$ est le plus petit point fixe de ψ. Conclure.

9 – Après l'effort, le réconfort

Exercice 9. (*Épiphanie*) Lors des vœux du directeur au Pôt, n galettes sont servies, chacune contenant une fève et étant coupée en p parts. Au moment de vous servir, il reste $p_1, \ldots, p_n$ parts dans chaque galette respectivement. En outre, comme chaque personne qui a trouvé une fève porte immédiatement une couronne, vous savez qu'exactement k fèves ont été trouvées. Votre objectif est de maximiser votre probabilité de trouver une fève.

1. Quand $k = n - 1$ dans quelle galette devez-vous tirer ?
2. Et quand $k = 0$?
3. En général, est-ce qu'il y a intérêt à tirer dans une galette qui n'est ni la plus grande, ni la plus petite ?



Arbre de Galton-Watson critique conditionné à avoir une grande taille donnée (par Igor Kortchemski)

Fin