Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$14

Corrigé

Exercice 1

1. a) Posons $f(x,y) = \left(-x + \frac{3y^2}{1+4xy}, -2y\left(\frac{1+xy}{1+4xy}\right)\right)$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ouvert de définition. Elle admet $(0,0)$ pour point fixe et sa différentielle en ce point a pour matrice dans la base canonique $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{smallmatrix}\right)$. Les valeurs propres de cette matrice ont leurs parties réelles négatives donc, d'après un théorème du cours, le système admet une fonction de Lyapunov forte au voisinage de $(0,0)$.
La fonction $\alpha(x,y) = x^2 + y^2$ est une telle fonction. En effet, $(0,0)$ est un minimum local strict de α.
De plus :

$$\begin{aligned} d\alpha(x,y).f(x,y) &= 2x\left(-x + \frac{3y^2}{1+4xy}\right) + 2y\left(-2y\left(\frac{1+xy}{1+4xy}\right)\right) \\ &= -2x^2 - 4y^2 + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

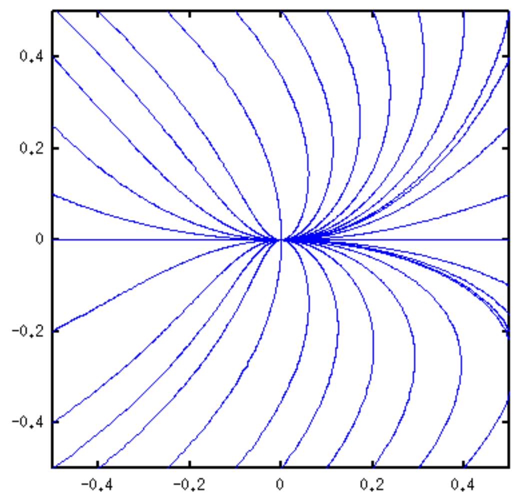
donc $d\alpha(x,y).f(x,y) \leq -\alpha(x,y)$ pour (x,y) assez proche de $(0,0)$.
b) D'après le cours, l'existence d'une fonction de Lyapunov forte α garantit la stabilité asymptotique, à condition qu'on ait $d^2\alpha(0,0) \geq \alpha Id$. Ici, on a $d^2\alpha(0,0) = 2Id$ donc cette dernière condition est manifestement vérifiée.
c) Soit (x,y) une solution quelconque de l'équation. Posons $(X(t), Y(t)) = (x(t) + y^2(t), y(t) - x^2(t))$.
Alors :

$$\begin{aligned} X'(t) &= x'(t) + 2y(t)y'(t) \\ &= -x(t) + \frac{3y^2(t)}{1+4x(t)y(t)} - 4y^2(t)\left(\frac{1+x(t)y(t)}{1+4x(t)y(t)}\right) \\ &= -x(t) - y^2(t) = -X(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y'(t) &= y'(t) - 2x(t)x'(t) \\ &= -2y(t)\left(\frac{1+x(t)y(t)}{1+4x(t)y(t)}\right) + 2x^2(t) - \frac{6x(t)y^2(t)}{1+4x(t)y(t)} \\ &= 2x^2(t) - 2y(t) = -2Y(t) \end{aligned}$$

donc $X(t) = X(0)e^{-t}$ et $Y(t) = Y(0)e^{-2t}$.

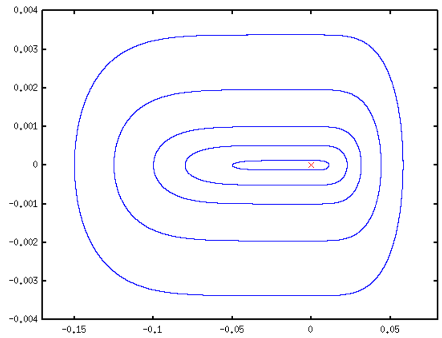
L'application $\phi : (x,y) \to (x+y^2, y-x^2)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme au voisinage de $(0,0)$ (par le théorème d'inversion locale : sa différentielle en $(0,0)$ est l'identité).
Pour (x_0,y_0) assez proche de $(0,0)$, la solution de l'équation qui vaut (x_0,y_0) au temps $t=0$ est donc $\phi^{-1}\left((x_0+y_0^2)e^{-t}, (y_0-x_0^2)e^{-2t}\right)$.



2. $f(x,y) = (-x^3, -y^3)$ convient.
En effet, les solutions de $u' = f(u)$ sont les courbes $(x(t),y(t)) = (x_0\sqrt{\frac{1}{1+2tx_0^2}}, y_0\sqrt{\frac{1}{1+2ty_0^2}})$. Les solutions sont donc bien définies sur tout $\mathbb{R}^+$ et on a, quels que soient x_0 et y_0 :

$$||(x(t),y(t))|| \leq ||(x_0,y_0)||$$

De plus, $(x(t),y(t)) \to (0,0)$ quand $t \to +\infty$.
3. a) $x \to 4x^3 1_+(x)$ admet pour dérivée $x \to 12x^2 1_+(x)$ et pour dérivée seconde $x \to 24x^2 1_+(x)$, qui est continue. Donc f est $\mathcal{C}^2$.
Dans la base canonique, la matrice de $df(0,0)$ est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
b) $f(0,0) = (0,0)$
c) Si (x,y) est une solution de $u' = f(u)$, alors $\phi(x(t),y(t))' = (4x^3 1_+(x) + 6x^5)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$.
Les lignes de niveau de ϕ sont des courbes fermées « entourant » le point $(0,0)$, à part la ligne de niveau $\{\phi(x,y) = 0\}$, qui est réduite au point $(0,0)$.
Comme f ne s'annule pas en un autre point que $(0,0)$, une solution qui n'est pas stationnaire en $(0,0)$ parcourt une ligne de niveau de ϕ (en particulier, elle est périodique).
Une solution $(x(t),y(t))$ qui vaudrait $(\epsilon,0)$ en $t=0$, avec $\epsilon > 0$ va donc passer par le point $(\eta, 0)$, où η est le réel strictement négatif tel que $\phi(\epsilon,0) = \phi(\eta,0)$.
Cette dernière relation équivaut à $\epsilon^4 + \epsilon^6 = \eta^6$. On a donc, pour ϵ tendant vers 0, $\eta \sim \epsilon^{2/3}$.
Pour que $(0,0)$ soit un point stationnaire stable de l'équation, il faudrait qu'on ait, pour une certaine constante C_0, pour tout $(x(0),y(0))$ assez proche de $(0,0)$ et pour tout $t \geq 0$: $||(x(t),y(t))|| \leq C_0||(x(0),y(0))||$. Cela entraînerait donc que, pour tout ϵ assez petit, $\eta \leq C_0\epsilon$. Puisque $\eta \sim \epsilon^{2/3}$, c'est impossible.



4. [Merci à Marin Ballu pour cette solution.]
Soit $\lambda > 0$ une valeur propre strictement positive de $Df(0)$. Soit v un vecteur propre de $Df(0)$ associé à la valeur propre λ, de norme 1.
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, le flot $(t,x) \to \phi_t(x)$ associé à l'équation $u' = f(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, d'après le théorème de différentiabilité du flot, $d_x\phi_t$ est dérivable par rapport au temps et satisfait l'équation suivante :

$$\partial_t(d_x\phi_t(x)) = df(\phi_t(x)) \circ d_x\phi_t(x)$$

Puisque $\phi_t(0) = 0$ pour tout t (car 0 est un point stationnaire), l'équation devient, pour $x = 0$:

$$\partial_t(d_x\phi_t(0)) = df(0) \circ d_x\phi_t(0)$$

Comme, de plus, $d_x\phi_t(0) = Id$, $d_x\phi_t(0) = \exp(tdf(0))$ pour tout t positif.
Supposons par l'absurde que le point stationnaire 0 est stable. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, on ait :

$$\forall t \geq 0, \quad ||\phi_t(\epsilon v)|| \leq C||\epsilon v|| = C\epsilon$$

Pour tout t, lorsque $\epsilon \to 0$, $||\phi_t(\epsilon v)|| \sim \epsilon||d\phi_t(0).v|| = \epsilon e^{\lambda t}$ (puisque $df(0).v = \lambda v$). L'inégalité $||\phi_t(\epsilon v)|| \leq C\epsilon$ implique donc :

$$\forall t \geq 0, \quad e^{\lambda t} \leq C$$

C'est manifestement impossible.

Exercice 2

1. Elle est manifestement bilinéaire. De plus, $||\psi(y,z)||_\infty \leq (||h||_\infty + ||k||_\infty)||y||_E||z||_E$ donc elle est continue.

2. Pour toutes $y, z \in E$, $\phi(y+z) = \phi(y) + z'' + 2hy'z' + 2kyz + hz'^2 + kz^2$.
L'application $z \in E \to z'' + 2hy'z' + 2kyz$ est linéaire et continue de E dans F. De plus, $||hz'^2 + kz^2||_\infty \leq (||h||_\infty + ||k||_\infty)\,||z||_E^2 = o(||z||_E)$ quand $||z||_E \to 0$.
Donc ϕ est dérivable et $d\phi(y).z = z'' + 2hy'z' + 2kyz$.
En 0, $d\phi(0) = z''$.

3. L'application $d\phi(0) : E \to F$ est inversible, d'inverse continue. En effet, la fonction $R : F \to E$ suivante est continue et est sa réciproque :

$$R(f)(t) = \int_0^t (t-u)f(u)du - t\int_0^1 (1-u)f(u)du$$

[Remarque : pour vérifier que R est continue, il suffit de calculer $R(f)'$ et $R(f)''$ et de vérifier que $R(f), R(f)', R(f)''$ sont bornées en norme infinie par des multiples de $||f||_\infty$.]
D'après le théorème d'inversion locale, ϕ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans E et un voisinage de 0 dans F. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, l'équation $\phi(y) = f$ a donc toujours une solution dans E si $||f||_\infty < \epsilon$.

Exercice 3

1. a) L'ensemble $\omega(x)$ est une intersection de compacts (car les fermés de U inclus dans D sont compacts, puisque D est compact) emboîtés et non-vides. C'est donc un compact non-vide.
b) Voir TD précédent. La même question s'y trouve.
c) Pour tous r_1, r_2 et tout $y \in U$, $\phi_{r_1}(\phi_{r_2}(y)) = \phi_{r_1+r_2}(y)$.
L'application $(s, y) \to \phi_s(y)$ est continue d'après le théorème de différentiabilité du flot.
Si $s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\phi_s(\omega(x)) &\subset \bigcap_{r\geq 0} \phi_s\left(\overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq r\}}\right) \\
&\subset \bigcap_{r\geq 0} \overline{\phi_s\left(\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq r\}\right)} \\
&= \bigcap_{r\geq 0} \overline{\{\phi_{t+s}(x) \text{ tq } t \geq r\}} \\
&= \bigcap_{r\geq s} \overline{\{\phi_t(x) \text{ tq } t \geq r\}} = \omega(x)
\end{aligned}$$

2. a) Quitte à changer de repère, on peut supposer que $x_0 = 0$ et $D = \mathbb{R} \times \{0\}$.
D'après le théorème de différentiabilité du flot, l'application $(y, s) \in U \times \mathbb{R} \to \phi_s(y) \in U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Posons $\delta(r, t) = \phi_t((r, 0))$ pour tous $r, t \in \mathbb{R}$ tels que $(r, 0) \in U$. Alors δ est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculons $d\delta(0, 0)$.
Puisque $\delta(r, 0) = (r, 0)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ assez proche de 0, $d\delta(0, 0).(h, 0) = (h, 0)$. De plus, $t \to \phi_t(0, 0)$ est la solution de $(\star)$ pour la condition initiale $x_0 = (0, 0)$ donc sa dérivée en $(0, 0)$ est $f(x_0)$.
Donc $d\delta(0, 0).(h, l) = h.(1, 0) + l.f(x_0)$. Comme on a supposé que $f(x_0)$ n'est pas colinéaire à la direction de D (c'est-à-dire $(1, 0)$), $d\delta$ est inversible au voisinage de $x_0 = 0$ (d'après le théorème d'inversion locale).
Notons ψ la réciproque de δ. Quitte à restreindre l'ouvert V de définition de ψ, on peut supposer que $\psi(V) =]-\epsilon_1; \epsilon_1[\times] - \epsilon_2; \epsilon_2[$ pour certains réels $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$.
Montrons que les trois conditions voulues sont vérifiées.
La première l'est : $\delta(0, 0) = (0, 0) = x_0$ donc $\psi(x_0) = (0, 0)$.
La deuxième l'est aussi : $\psi^{-1}(] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times\{0\}) = \{\delta(r, 0) \text{ tq } r \in] - \epsilon_1; \epsilon_1[\} =] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times\{0\} \subset D$.
Enfin, on a $V = \delta(] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times] - \epsilon_2; \epsilon_2[) = \{\phi_t((r, 0)), r \in] - \epsilon_1; \epsilon_1[, t \in] - \epsilon_2; \epsilon_2[\}$. Soit X une solution maximale de l'équation différentielle $(\star)$ restreinte à V. Elle est définie sur un intervalle de la forme $]a; b[$.
Soit $T \in]a; b[$ quelconque. Puisque $V = \delta(] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times] - \epsilon_2; \epsilon_2[)$, il existe $(r_0, t_0) \in] - \epsilon_1; \epsilon_1[\times] - \epsilon_2; \epsilon_2[$ tel que $X(T) = \delta(r_0, t_0) = \phi_{t_0}((r_0, 0))$.

Puisque $t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[\to \phi_{t-T+t_0}((r_0,0))$ est une solution de $(\star)$ qui coïncide avec X en T et puisque, à condition initiale fixée, la solution de $(\star)$ est unique :

$$\forall t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[, \quad X(t) = \phi_{t-T+t_0}((r_0,0))$$

De plus, $\phi_{-\epsilon_2}((r_0,0)) \notin V$. En effet, sinon, on aurait $\phi_{-\epsilon_2}((r_0,0)) = \phi_{t_1}((r_1,0))$ pour un $(r_1,t_1) \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[$ et on devrait avoir, pour tout $\eta > 0$ assez petit, $\phi_{-\epsilon_2+\eta}((r_0,0)) = \phi_\eta(\phi_{-\epsilon_2}((r_0,0))) = \phi_\eta(\phi_{t_1}((r_1,0))) = \phi_{t_1+\eta}((r_1,0))$ ce qui serait en contradiction avec l'injectivité de δ sur $]-\epsilon_1;\epsilon_1[\times]-\epsilon_2;\epsilon_2[$.
De même, $\phi_{\epsilon_2}((r_0,0)) \notin V$. La fonction $t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[\to \phi_{t-T+t_0}((r_0,0)) = \delta(r_0, t-T+t_0)$ ne se prolonge donc pas sur V et est solution maximale. Elle est donc exactement égale à X, intervalle de définition compris.
Puisque ψ est la réciproque de δ, $\psi(X)$ est la fonction $t \in]T-t_0-\epsilon_2; T-t_0+\epsilon_2[\to (r_0, t-T+t_0)$.
La condition (3) est donc également vérifiée.

3. On utilise les notations de la question 2. pour la section transverse I.
Soit X la solution de $(\star)$ pour la condition initiale x.
Supposons par l'absurde que $\omega(x)$ intersecte I en deux points A et B distincts, tels que $\psi(A) = (a,0)$ et $\psi(B) = (b,0)$ pour des réels $a, b \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[$ distincts.
Soient $W_a, W_b \subset]-\epsilon_1;\epsilon_1[$ des intervalles ouverts disjoints contenant respectivement a et b.
Puisque $\psi^{-1}(W_a \times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$ est un voisinage de A et puisque $A \in \omega(x)$ est un point d'adhérence de X, il existe T_1 tel que $X(T_1) \in \psi^{-1}(W_a \times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$.
Notons S_1 l'intervalle maximal contenant T_1 tel que X prend ses valeurs dans V sur S_1. D'après la propriété (3) de la question 2., S_1 est de la forme $]t_1-\epsilon_2; t_1+\epsilon_2[$ et $X(t) = \psi^{-1}(\alpha, t-t_1)$ pour tout $t \in S_1$, où $\alpha \in]-\epsilon_1;\epsilon_1[$ et $t_1 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.
Puisque $X(T_1) \in \psi^{-1}(W_a \times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$, $\alpha \in W_a$. Donc $X(t_1) = \psi^{-1}(\alpha, 0) \in \psi^{-1}(W_a \times \{0\})$. De plus, puisque $T_1 \in S_1 =]t_1-\epsilon_2; t_1+\epsilon_2[$, $|T_1 - t_1| < \epsilon_2$.
On a donc trouvé $t_1 \in]T_1-\epsilon_2; T_1+\epsilon_2[$ tel que $X(t_1) \in \psi^{-1}(W_a \times \{0\})$.

Soit maintenant $T_2 > T_1 + 2\epsilon_2$ tel que $X(T_2) \in \psi^{-1}(W_b \times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$. Il existe car $B \in \psi^{-1}(W_b \times]-\epsilon_2;\epsilon_2[)$ est point d'adhérence de X. De même que précédemment, on peut trouver $t_2 \in]T_2-\epsilon_2; T_2+\epsilon_2[$ tel que $X(t_2) \in \psi^{-1}(W_b \times \{0\})$ et on a $t_2 > t_1$.
On peut ensuite trouver $t_3 > t_2$ tel que $X(t_3) \in \psi^{-1}(W_a \times \{0\})$.
Alors $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$ sont trois points d'intersection de X avec I dont au moins deux sont distincts. Cependant, $X(t_2)$ n'est pas situé entre $X(t_1)$ et $X(t_3)$ (puisque $X(t_1)$ et $X(t_3)$ appartiennent à l'intervalle $\psi^{-1}(W_a \times \{0\})$ alors que $X(t_2)$ appartient à l'intervalle $\psi^{-1}(W_b \times \{0\})$, qui est disjoint du précédent) alors que $t_1 < t_2 < t_3$. C'est donc en contradiction avec le résultat que nous venons d'admettre.

4. a) D'après la question 1.c), $\phi_s(y) \in \omega(x)$ pour tout $s \geq 0$. Donc $X(\mathbb{R}^+) \subset \omega(x)$. Puisque $\omega(y) \subset \overline{X(\mathbb{R}^+)}$ et puisque $\omega(x)$ est un compact contenant $X(\mathbb{R}^+)$, on a aussi $\omega(y) \subset \omega(x)$.
b) Soit $z \in \omega(y)$. Soit I une section transverse passant par z, construite comme à la question 2. (on peut appliquer cette construction car f ne s'annule pas sur $\omega(x)$ donc, comme $z \in \omega(y) \subset \omega(x)$, $f(z) \neq 0$).
De la même façon qu'à la question 3., on peut montrer qu'il existe $0 < t_1 < t_2$ deux réels tels que $X(t_1) \in I$ et $X(t_2) \in I$. Puisque $X(\mathbb{R}^+) \subset \omega(x)$ et puisque $\omega(x)$ a au plus un point d'intersection avec I, d'après la question 3., $X(t_1) = X(t_2)$.

Puisque, à condition initiale fixée, la solution de $(\star)$ est unique, $X(t_1+t) = X(t_2+t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc X est périodique de période $t_2 - t_1$.

5. L'image d'une fonction périodique continue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est toujours un fermé de $\mathbb{R}^2$ (car son image est en particulier l'image du compact $[0;T]$ où T est la période de la fonction). Puisqu'on a vu à la question 4.b) que X était périodique, $X(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$, donc aussi dans $\omega(x)$.
Montrons maintenant que $X(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\omega(x)$. Pour cela, on fixe $t \in \mathbb{R}$ et on montre qu'il existe un voisinage de $X(t)$ qui n'a pas d'intersection avec $\omega(x) - X(\mathbb{R})$.
Soit I une section transverse passant par $X(t)$ et $V \subset U$ un voisinage de $X(t)$ comme dans la question 2.
Supposons qu'il existe un point $z \in V \cap (\omega(x) - X(\mathbb{R}))$. Soit Y la solution maximale de $(\star)$ pour la condition initiale $Y(0) = z$. D'après la question 4. appliquée à z au lieu de y, Y est une fonction périodique dont l'image est incluse dans $\omega(x)$.
Si on considère un intervalle maximal S sur lequel Y prend ses valeurs dans V, on a, d'après la propriété (3) de la question 2., que S est de la forme $]t_0 - \epsilon_2; t_0 + \epsilon_2[$ et que $\psi(Y(t_0)) = (a, 0)$ pour un certain a, ce qui implique que $Y(t_0) \in I$.
Donc l'image de Y intersecte I. Le point d'intersection entre Y et I n'est pas $X(t)$ sinon Y et X seraient égales (à décalage près) et z appartiendrait à $X(\mathbb{R})$. Donc $\omega(x)$ intersecte I en au moins deux points, $X(t)$ et $Y(t_0)$. D'après la question 3., c'est absurde.
Donc $V \cap (\omega(x) - X(\mathbb{R})) = \emptyset$.

On a montré que $X(\mathbb{R})$ était un ouvert et un fermé de $\omega(x)$. Puisque, d'après la question 1.b), $\omega(x)$ est connexe, $\omega(x) = X(\mathbb{R})$.