Processus aléatoires
ENS Paris, 2017-2018

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 14 : Convergence de chaînes de Markov

Mercredi 20 Décembre

Exercice 1 (Une suite de flips)
Soit $n \geq 4$. On considère un polygone régulier $\mathscr{P}_n$ à n sommets, numérotés de 1 à n. Une *triangulation* de $\mathscr{P}_n$ est une manière de tracer $n-3$ diagonales de $\mathscr{P}_n$ qui divisent $\mathscr{P}_n$ en $n-2$ triangles. On note $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des triangulations de $\mathscr{P}_n$.

Si $t \in \mathscr{T}_n$ et d est une des diagonales de t, on peut supprimer d, ce qui crée un quadrilatère, et remplacer d par l'autre diagonale de ce quadrilatère (on dit alors qu'on *flippe* d). On obtient ainsi une triangulation qu'on note $\mathfrak{flip}(t,d)$.

On se fixe $t_0 \in \mathscr{T}_n$ et on définit $(T_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante : $T_0 = t_0$ et, pour tout $n \geq 0$, conditionnellement à $(T_0, \dots, T_n)$, on choisit uniformément une diagonale d_n de T_n et on pose $T_{n+1} = \mathfrak{flip}(T_n, d_n)$.

1. Vérifier que (T_n) est une chaîne de Markov sur $\mathscr{T}_n$ et qu'elle admet la mesure uniforme comme mesure stationnaire.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathscr{T}_n$, en partant de t, il est possible d'obtenir en un nombre fini de flips la triangulation où toutes les diagonales sont issues du sommet 1. En déduire que (T_n) est irréductible.
3. La chaîne (T_n) converge-t-elle vers la mesure uniforme ?

Exercice 2 (Durée de vie des ampoules)
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\mu = \mathbb{E}[Y_1] < +\infty$,
- $\mathrm{PGCD}\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n\,.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique.
2. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1,\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$
3. Quel est le rapport avec le titre de l'exercice ?

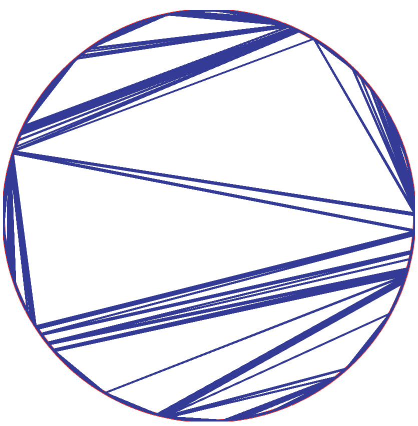
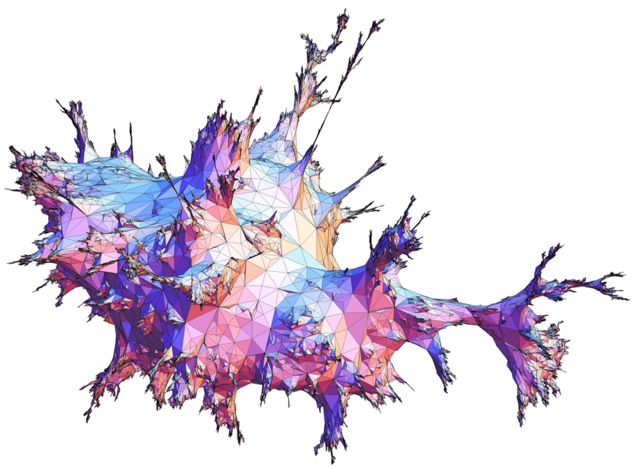
Exercice 3 (Un mélange de cartes)
Soit $n > 0$. On cherche à mélanger un jeu de n cartes numérotées de 1 à n. À l'instant 0, les cartes sont rangées dans l'ordre (la carte 1 est en haut du paquet, la carte n en bas). À chaque instant, on choisit uniformément une carte dans le paquet et on la replace en haut. À l'instant k, le paquet est décrit par une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ qu'on note X_k (plus précisément $X_k(i)$ est le numéro sur la i-ème carte du paquet en partant du haut). On note μ_k la loi de X_k et μ la mesure uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Le but de l'exercice est d'estimer combien de fois il faut répéter cette opération pour que le jeu soit bien mélangé. Si μ et ν sont deux mesures sur $\mathfrak{S}_n$, on notera

$$d(\mu, \nu) = \max_{A \subset \mathfrak{S}_n} |\mu(A) - \nu(A)|$$

la *distance en variation totale* entre μ et ν.

1. Montrer que $d(\mu, \mu_k) \to 0$ quand $k \to +\infty$ à n fixé.
2. On note A_k l'ensemble des cartes qui ont été déplacées au moins une fois en haut du paquet entre l'instant 0 et l'instant k, et $T_i = \min \big\{k \geq 0 \big| |A_k| \geq i \big\}$. Montrer que pour tous $\varepsilon > 0$ et $j > 0$ fixés, on a
$$\mathbb{P}\big((1-\varepsilon) n \ln n \leq T_{n-j} \leq (1+\varepsilon) n \ln n\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$
3. En déduire que si $k = (1-\varepsilon) n \ln n$, alors
$$d(\mu_k, \mu) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$
4. On place à côté de notre jeu un deuxième jeu, déjà mélangé de manière uniforme. À chaque instant k, si on place la carte numérotée i en haut du premier paquet, on place également la carte numérotée i en haut du second paquet. On note $\widetilde{X}_k$ la permutation qui décrit le second jeu au temps k. Montrer que $\widetilde{X}_k$ est uniforme pour tout k et que, pour $k = (1+\varepsilon) n \ln n$,
$$\mathbb{P}\left(X_k = \widetilde{X}_k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$
5. En déduire que si $k = (1+\varepsilon) n \ln n$, alors
$$d(\mu_k, \mu) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Exercice 4 (Jolie image)
Que représentent les jolies images ci-dessous ?

Exercice 5 Saurez-vous retrouver la subtile contrepèterie qui s'est cachée dans ce TD ?