Processus aléatoires
ENS Paris, 2017-2018

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 14 : Convergence de chaînes de Markov
Corrigé

Mercredi 20 Décembre

Exercice 1 (Une suite de flips)
Soit $n \geq 4$. On considère un polygone régulier $\mathscr{P}_n$ à n sommets, numérotés de 1 à n. Une *triangulation* de $\mathscr{P}_n$ est une manière de tracer $n-3$ diagonales de $\mathscr{P}_n$ qui divisent $\mathscr{P}_n$ en $n-2$ triangles. On note $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des triangulations de $\mathscr{P}_n$.

Si $t \in \mathscr{T}_n$ et d est une des diagonales de t, on peut supprimer d, ce qui crée un quadrilatère, et remplacer d par l'autre diagonale de ce quadrilatère (on dit alors qu'on *flippe* d). On obtient ainsi une triangulation qu'on note $\mathfrak{flip}(t, d)$.

On se fixe $t_0 \in \mathscr{T}_n$ et on définit $(T_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante : $T_0 = t_0$ et, pour tout $n \geq 0$, conditionnellement à $(T_0, \dots, T_n)$, on choisit uniformément une diagonale d_n de T_n et on pose $T_{n+1} = \mathfrak{flip}(T_n, d_n)$.

1. Vérifier que (T_n) est une chaîne de Markov sur $\mathscr{T}_n$ et qu'elle admet la mesure uniforme comme mesure stationnaire.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathscr{T}_n$, en partant de t, il est possible d'obtenir en un nombre fini de flips la triangulation où toutes les diagonales sont issues du sommet 1. En déduire que (T_n) est irréductible.
3. La chaîne (T_n) converge-t-elle vers la mesure uniforme ?

Solution de l'exercice 1

1. On vérifie que T est une chaîne de Markov de matrice de transition Q avec
$$Q(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{n-3} & \text{si on peut passer de } t \text{ à } t' \text{ par un unique flip,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Conditionnellement à $(T_0, \dots, T_n)$, la diagonale d_n est uniforme dans T_n, donc pour s'assurer que T_{n+1} est uniforme parmi les triangulations "directement accessibles" depuis T_n, il suffit de vérifier que flipper deux arêtes différentes de T_n donne deux triangulations différentes. Ceci est vrai car si $d \neq d'$ sont deux diagonales de T_n, alors $\mathfrak{flip}(T_n, d)$ contient d', ce qui n'est pas le cas de $\mathfrak{flip}(T_n, d')$. De plus, il est immédiat par la définition de Q que Q admet la mesure uniforme sur $\mathscr{T}_n$ comme mesure réversible, donc stationnaire.
2. Soit t_0 la triangulation dont les $n-3$ diagonales relient 1 à $3, 4, \dots, n-1$. On va montrer que si $t \neq t_0$, alors on peut, en flippant une arête de t, augmenter strictement le degré du sommet 1. Cela suffira à conclure car t_0 est la seule triangulation où le degré du sommet 1 est maximal (égal à $n-1$). Si $t \neq t_0$, soit $3 \leq i \leq n-1$ tel que 1 n'est pas relié à i dans t. Soient $j < i$ maximal et $k > i$ minimal tels que 1 est relié à j et k (ils existent car 1 est relié à 2 et n). Alors $(1, j, k)$ doit être un des triangles de t, donc j est relié à k. On a de plus $k - j \geq 2$ donc l'arête entre j et k est bien une diagonale. En flippant cette diagonale, le degré de 1 augmente de 1.
On en déduit $Q^{n-3}(t, t_0) > 0$ pour tout $t \in \mathscr{T}_n$ (le degré augmente de 1 à chaque étape et démarre au moins à 2, donc met au plus $n-3$ étapes à atteindre $n-1$). Par réversibilité, on a $Q^{n-3}(t_0, t') > 0$ pour tout $t' \in \mathscr{T}_n$, donc $Q^{2n-6}(t, t') > 0$ pour tous $t, t' \in \mathscr{T}_n$, et Q est bien irréductible.

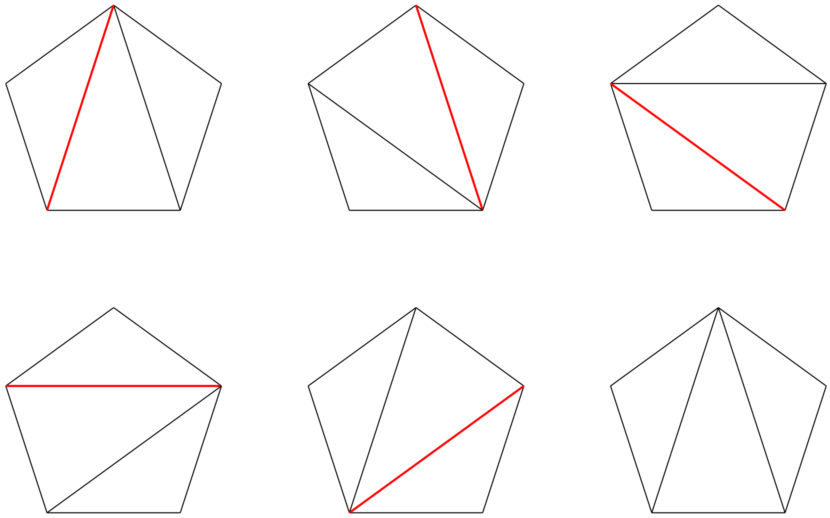


Figure 1 – En 5 flips, on revient à la triangulation de départ.

3. D'après les deux questions précédentes, il suffit de déterminer si la chaîne (T_n) est apériodique. Pour $n = 4$, elle ne l'est pas. En effet, on vérifie facilement $|\mathscr{T}_4| = 2$, et on a $T_{n+1} \neq T_n$ pour tout n donc T est périodique de période 2.
   Soit maintenant $n \geq 5$. On a $Q^2(t,t) > 0$ pour tout t (flipper deux fois la "même" diagonale) donc la période de T vaut 1 ou 2. Par ailleurs, pour $n = 5$, on peut réaliser les opérations de la figure 1, ce qui montre qu'il existe t telle que $Q^5(t,t) > 0$. La période de la chaîne divise donc 5, donc elle vaut 1 et T est apériodique. Pour $n \geq 6$, il suffit d'isoler un pentagone et de faire les mêmes flips que sur la figure 1 à l'intérieur de ce pentagone pour obtenir le même résultat. On a donc convergence de T_n vers la mesure uniforme si et seulement si $n \geq 5$.

Remarque Si la chaîne obtenue n'est pas apériodique, une manière naturelle de la rendre apériodique est de la rendre "paresseuse", c'est-à-dire de lui donner à chaque étape une probabilité > 0 de ne pas bouger. Par exemple, avec probabilité p on a $T_{n+1} = T_n$, et avec probabilité $1 - p$ on flippe une arête uniforme.

Exercice 2 (Durée de vie des ampoules)
Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\mu = \mathbb{E}[Y_1] < +\infty$,
- $\mathrm{PGCD}\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n\,.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique.
2. En déduire
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1,\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$
3. Quel est le rapport avec le titre de l'exercice ?

Solution de l'exercice 2

1. On remarque (faire un dessin !) que, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n \neq 0, \\ Y_{k+1} - 1 & \text{si } X_n = 0 \text{ et } n = Y_1 + \ldots + Y_k. \end{cases}$$

Sur l'événement $\{Y_1 + ... + Y_k = n\}$ (qui est dans $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$), les variables $X_0, ..., X_n$ sont $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$-mesurables, et donc indépendantes de $X_{n+1} = Y_{k+1} - 1$. Sur l'événement $\{X_n \geq 1\}$, $X_{n+1} = X_n - 1$ p.s.. Cela implique que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q définie par

$$\begin{array}{lcll} Q(i, i-1) & = & 1 & \text{pour } i \geq 1 \\ Q(0, j) & = & \mathbb{P}(Y_1 = j+1) & \text{pour } j \geq 0 \\ Q(i, j) & = & 0 & \text{dans les autres cas}\,. \end{array}$$

Vérifions-le plus proprement. On a, pour tous $(x_0, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{N}$, si $x_n > 0$:

$$\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{n+1} \neq x_n - 1, \\ \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $x_n = 0$, d'après l'indépendance énoncée ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}\right) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, X_{n+1} = x_{n+1}\right) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, Y_{k+1} = x_{n+1} + 1\right) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n\right) \mathbb{P}\left(Y_{k+1} = x_{n+1} + 1\right) \\ &= \left(\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n\right)\right) \\ &\qquad \times \mathbb{P}\left(Y_1 = x_{n+1} + 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_0 = x_0, ..., X_n = 0\right) \mathbb{P}\left(Y_1 = x_{n+1} + 1\right). \end{aligned}$$

L'espace d'états de $(X_n)_{n\geq 0}$ est $S = \{0, \ldots, m\}$ si $m = \sup\{i \geq 0 | \mathbb{P}(Y_1 = i+1) > 0\} < +\infty$ et $S = \mathbb{N}$ sinon. On vérifie que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible. Soient $i, j \in S$. Si $i > j$, alors $Q^{i-j}(i, j) = 1 > 0$. Si $i \leq j$, soit $\ell \geq j$ tel que $\mathbb{P}(Y_1 = \ell + 1) > 0$. Alors

$$Q^{i+\ell-j+1}(i, j) \geq Q^i(i, 0) Q(0, \ell) Q^{\ell-j}(\ell, j) > 0.$$

Enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$Q^n(0, 0) \geq \mathbb{P}(Y_1 = n)\,,$$

donc

$$L_0 := \{n \geq 1 \,|\, Q^n(0, 0) > 0\} \supset \{n \geq 1 \,|\, \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\}\,,$$

où ce dernier ensemble est de PGCD 1, donc 0 est de période 1, donc la chaîne est apériodique.

2. D'après la question précédente Q admet une unique mesure stationnaire ν, et X converge en loi vers ν. La limite qui nous intéresse est donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = \nu(0).$$

On doit donc calculer ν. Pour tout i, on a

$$\nu(i) = \nu(i+1) + \nu(0)\mathbb{P}\left(Y_1 = i+1\right),$$

d'où on déduit facilement, par récurrence sur i,

$$\nu(i) = \nu(0)\mathbb{P}\left(Y_1 > i\right).$$

On a donc

$$1 = \nu(0) \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\left(Y_1 > i\right) = \nu(0) \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}\left(Y_1 \geq i\right) = \nu(0)\mu,$$

donc $\nu(0) = \frac{1}{\mu}$, d'où le résultat.

3. Imaginons que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ représente la durée de vie d'ampoules. Quand la k-ième ampoule ne fonctionne plus, on la remplace par la $(k+1)$-ième dont la durée de vie est Y_{k+1}. L'exercice montre qu'asymptotiquement, la probabilité d'avoir à changer une ampoule à l'instant n est l'inverse de la durée de vie moyenne des ampoules, ce qui est assez intuitif.

Exercice 3 (Un mélange de cartes)
Soit $n > 0$. On cherche à mélanger un jeu de n cartes numérotées de 1 à n. À l'instant 0, les cartes sont rangées dans l'ordre (la carte 1 est en haut du paquet, la carte n en bas). À chaque instant, on choisit uniformément une carte dans le paquet et on la replace en haut. À l'instant k, le paquet est décrit par une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ qu'on note X_k (plus précisément $X_k(i)$ est le numéro sur la i-ème carte du paquet en partant du haut). On note μ_k la loi de X_k et μ la mesure uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Le but de l'exercice est d'estimer combien de fois il faut répéter cette opération pour que le jeu soit bien mélangé. Si μ et ν sont deux mesures sur $\mathfrak{S}_n$, on notera

$$d(\mu, \nu) = \max_{A\subset\mathfrak{S}_n} |\mu(A) - \nu(A)|$$

la *distance en variation totale* entre μ et ν.

1. Montrer que $d(\mu, \mu_k) \to 0$ quand $k \to +\infty$ à n fixé.
2. On note A_k l'ensemble des cartes qui ont été déplacées au moins une fois en haut du paquet entre l'instant 0 et l'instant k, et $T_i = \min\left\{k \geq 0 \middle| |A_k| \geq i\right\}$. Montrer que pour tous $\varepsilon > 0$ et $j > 0$ fixés, on a
$$\mathbb{P}\big((1-\varepsilon)n \ln n \leq T_{n-j} \leq (1+\varepsilon)n \ln n\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
3. En déduire que si $k = (1-\varepsilon)n \ln n$, alors
$$d(\mu_k, \mu) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
4. On place à côté de notre jeu un deuxième jeu, déjà mélangé de manière uniforme. À chaque instant k, si on place la carte numérotée i en haut du premier paquet, on place également la carte numérotée i en haut du second paquet. On note $\widetilde{X}_k$ la permutation qui décrit le second jeu au temps k. Montrer que $\widetilde{X}_k$ est uniforme pour tout k et que, pour $k = (1+\varepsilon)n \ln n$,
$$\mathbb{P}\left(X_k = \widetilde{X}_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
5. En déduire que si $k = (1+\varepsilon)n \ln n$, alors
$$d(\mu_k, \mu) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Dans tout ce qui suit, la dépendance en n sera implicite.

1. On voit que X est une chaîne de Markov de matrice de transition Q avec
$$Q(\sigma, \pi) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \pi = \sigma \circ c_i^{-1} \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ où } c_i \text{ est le cycle } (1\,2\,\cdots\,i), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Ainsi, pour toute permutation π, il existe exactement n permutations σ telles que $Q(\sigma, \pi) = \frac{1}{n}$ et on a $Q(\sigma, \pi) = 0$ pour toutes les autres. On en déduit
$$\frac{1}{n!} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} Q(\sigma, \pi),$$
donc la mesure uniforme μ est stationnaire pour Q. Pour assurer la convergence de X vers μ, il suffit donc de montrer que Q est irréductible et apériodique. L'apériodicité est évidente car $Q(\sigma, \sigma) = \frac{1}{n} > 0$ pour tout σ. De plus, en partant de σ, on peut toujours obtenir la permutation π en plaçant successivement en haut du paquet les cartes $\pi(n), \pi(n-1), \dots, \pi(1)$, donc Q est irréductible.

2. Si $|A_k| = i$, alors conditionnellement à $\mathcal{F}_k$, la probabilité de placer une "nouvelle" carte en haut du paquet vaut $\frac{n-i}{n}$. En utilisant la propriété de Markov forte, on en déduit que les $T_{i+1} - T_i$ sont indépendantes, avec $T_{i+1} - T_i$ géométrique de paramètre $\frac{n-i}{n}$. On a donc

$$\mathbb{E}[T_{n-j}] = \sum_{i=0}^{n-j-1} \mathbb{E}\left[T_{i+1} - T_i\right] = n \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{1}{n-i} = n \ln n + O(n)$$

et, par indépendance,

$$\mathrm{Var}(T_{n-j}) = \sum_{i=0}^{n-j-1} \mathrm{Var}\left(T_{i+1} - T_i\right) = \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{ni}{(n-i)^2} \leq n^2 \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{1}{(n-i)^2} \leq \frac{\pi^2}{6} n^2.$$

Comme $\mathrm{Var}(T_{n-j}) = o\left(\mathbb{E}[T_{n-j}]^2\right)$ quand $n \to +\infty$, on en déduit le résultat par Bienaymé-Chebychev.

3. Soit $j > 0$, et S_j l'ensemble des permutations σ telles que $\pi(n) > \pi(n-1) > \cdots > \pi(n-j+1)$. On a d'une part $\mu(S_j) = \frac{1}{j!}$. D'autre part, avec proba tendant vers 1 quand $n \to +\infty$ on a $T_{n-j} \geq (1-\varepsilon) n \ln n$ d'après la question précédente. Or, on remarque que les cartes qui n'ont jamais été "remontées" se trouvent en-dessous de toutes les autres. Par conséquent, si $T_{n-j} \geq k$, alors au temps k les j cartes les plus basses du paquet n'ont jamais été remontées, donc les j cartes les plus basses du paquet sont encore dans l'ordre croissant, donc $X_k \in S_j$. On a donc

$$\mu_k(S_j) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

pour j fixé et $k = (1-\varepsilon) n \ln n$. On a donc $|\mu(S_j) - \mu_k(S_j)| \geq 1 - \frac{2}{j!}$ pour n assez grand, donc $d(\mu_k, \mu) \geq 1 - \frac{2}{j!}$ pour n assez grand. Comme cela est vrai pour tout j, on en déduit le résultat.

4. À chaque instant, la carte qu'on remonte en haut du premier jeu est uniforme, donc son numéro est uniforme dans $\{1, \ldots, n\}$, donc la carte qu'on remonte en haut du second jeu est uniforme, donc $\widetilde{X}$ est une chaîne de Markov avec les mêmes transitions que X. Elle admet donc la mesure uniforme comme mesure stationnaire. Comme $\widetilde{X}_0$ est déjà uniforme, la permutation $\widetilde{X}_k$ est donc uniforme pour tout k.

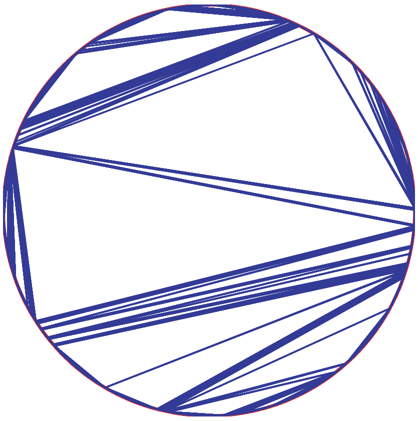
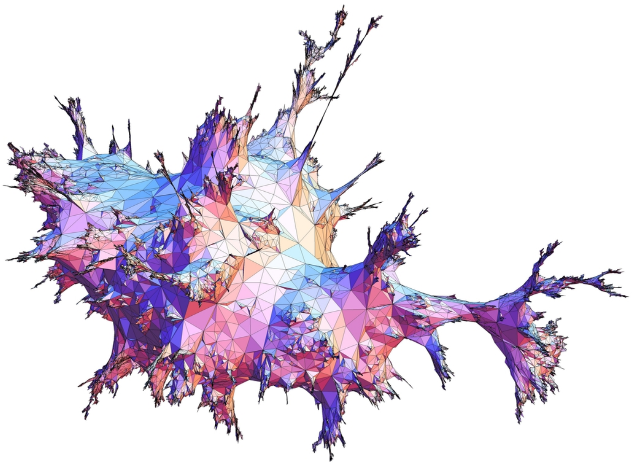
   Par ailleurs, considérons deux cartes i et j. Une fois que i et j ont toutes les deux été remontées au moins une fois, leur position relative est la même dans les deux paquets (la plus haute est la dernière à avoir été remontée). Par conséquent, dès que toutes les cartes ont été remontées au moins une fois, les positions relatives de i et j sont les mêmes dans les deux paquets pour tous i et j, donc les deux paquets sont rangés identiquement. Par conséquent, on a $\widetilde{X}_k = X_k$ dès que $k \geq T_n$. On conclut en utilisant la question 2.

5. Pour tout $A \subset \mathfrak{S}_n$, on a, en utilisant le fait que $\widetilde{X}_k$ est uniforme,

$$\begin{aligned} |\mu_k(A) - \mu(A)| &= \left| \mathbb{P}\left(X_k \in A\right) - \mathbb{P}\left(\widetilde{X}_k \in A\right) \right| \\ &\leq \mathbb{P}\left(X_k \in A, \widetilde{X}_k \notin A\right) + \mathbb{P}\left(X_k \notin A, \widetilde{X}_k \in A\right) \\ &\leq 2\,\mathbb{P}\left(X_k \neq \widetilde{X}_k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Remarque Cet exercice est un problème de *temps de mélange*. Un phénomène un peu surprenant se produit ici : alors qu'on pourrait s'attendre à ce que le jeu se mélange "progressivement", il est en fait très mal mélangé après un temps $0.99\, n \ln n$ et très bien mélangé après un temps $1.01\, n \ln n$. Ce phénomène, courant dans les problèmes de temps de mélange mais encore assez mal compris, est appelé "cutoff".

Exercice 4 (Jolie image)
Que représentent les jolies images ci-dessous ?

Solution de l'exercice 4 L'image de gauche est une illustration de l'exercice 1. Plus précisément, c'est une triangulation aléatoire uniforme d'un n-gone, avec n grand (de l'ordre de 10000). L'image est d'Igor Kortchemski, vous pouvez trouver d'autres simulations d'objets aléatoires similaires sur sa page.

L'image de droite est aussi une triangulation choisie uniformément au hasard, mais cette fois-ci parmi les triangulations de la sphère, sans ordre naturel entre les sommets. Plus précisément, une triangulation de la sphère est une manière de découper la sphère en faces triangulaires, considérée à déformation près. La triangulation de droite a été choisie uniformément parmi toutes les triangulations de la sphère à 32400 sommets. De telles triangulations peuvent aussi être simulées en flippant des arêtes choisies uniformément. Des images similaires (en couleur !) se trouvent sur ma page.

Exercice 5 Saurez-vous retrouver la subtile contrepèterie qui s'est cachée dans ce TD ?