Processus aléatoires
ENS Paris, 2018-2019

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 1 : Vers le mouvement brownien

Jeudi 13 Septembre

1 Problèmes de mesurabilité

Soit $T > 0$. On note $\mathcal{C}([0,T])$ l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}$ la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0,T])$ qui rend mesurable les applications coordonnées $x \to x(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Exercice 1 On munit $\mathcal{C}([0,T])$ de la norme uniforme. Montrer que $\mathcal{F}$ coïncide avec la tribu borélienne sur $\mathcal{C}([0,T])$. Est-ce toujours vrai en remplaçant $\mathcal{C}([0,T])$ par l'espace $L^\infty([0,T])$ des fonctions mesurables bornées de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ (toujours muni de la norme uniforme) ?

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0,T])$ muni de la même tribu que ci-dessus. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et tous $t_1, \dots, t_k \in [0,T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \qquad \text{et} \qquad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k})$$

ont la même loi. Montrer que X et Y ont la même loi.

2 Processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On rappelle que le *processus de Poisson* $(N_t)_{t \geq 0}$ *d'intensité* λ est défini par

$$N_t = \min\{n \in \mathbb{N} | \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n \geq t\},$$

où $(\xi_i)_{i \geq 0}$ est une suite de variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ, c'est à dire de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0} \, \mathrm{d}x$). On rappelle également que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par $\mathcal{P}_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Montrer que pour tous $s, t \geq 0$, les variables N_t et $N_{s+t} - N_t$ sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}_{\lambda t}$ et $\mathcal{P}_{\lambda s}$.

Montrer que pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, les variables $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ pour $0 \leq i \leq k-1$ sont indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}_{\lambda(t_{i+1} - t_i)}$.

Exercice 4 Soient $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ_1 et λ_2. Montrer que $N^{(1)} + N^{(2)}$ est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$.

3 Variables gaussiennes et vecteurs gaussiens

On rappelle qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est gaussien si pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)$, la variable $u \cdot X$ est gaussienne. En notant $\mu = \mathbb{E}[X]$ la *moyenne* de X et $K = (\mathrm{cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$ sa *matrice de covariance*, on a alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}\left[e^{iu\cdot X}\right] = \exp\left(iu \cdot \mu - \frac{1}{2} {}^t uKu\right).$$

Exercice 5 Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré, i.e. $\mathbb{E}[X] = 0$. Montrer que X_i et X_j sont indépendantes ssi $\mathbb{E}[X_i X_j] = 0$.

Exercice 6 Soient X, Y et ε trois variables aléatoires indépendantes avec X et Y gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$. Lesquels des vecteurs suivants sont gaussiens ?

1. (X, ε)
2. (X, Y)
3. $(X, \varepsilon X)$
4. $(X, \varepsilon Y)$
5. $(\varepsilon|X|, \varepsilon|Y|)$
6. $(X, X + Y)$
7. $(X, X + \varepsilon Y)$
8. $(X, \varepsilon X + Y)$

Exercice 7 Soit K une matrice symétrique positive. Expliquer comment simuler un vecteur gaussien centré de matrice de covariance K à partir de variables gaussiennes indépendantes.

Exercice 8 (Formule de Wick) Soit $(X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{d} X_i\right] = \sum_{\pi} \prod_{\{a,b\}\in\pi} \mathbb{E}[X_a X_b],$$

où la somme se fait sur toutes les partitions π de $[\![1, d]\!]$ en parties de taille 2.

4 Jolie image

Exercice 9 Que représente la jolie image ci-dessous ?