TD 2 – Intégration et théorèmes de convergence

"Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale."

— *Lebesgue 1901.*

1 – Petites questions

1. Soit μ une mesure finie sur $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$, qui converge simplement vers 0. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=0.$$

2. On définit sur un espace mesuré $(E,\mathcal{A},\mu)$ une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 0}$ et une fonction mesurable f telle que $f_n\to f$ μ-p.p. quand $n\to\infty$. On suppose que

$$\sup_{n\geq 0}\int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu<\infty.$$

   Montrer que f est intégrable.

3. (*Inégalité de Markov*) Soit $f\in\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$. Montrer que pour tout $A>0$,

$$\mu(\{|f|\geq A\})\leq \frac{1}{A}\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

4. Soit $f\in\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$. Montrer que $\mu(\{|f|=+\infty\})=0$. Que dire de la réciproque ?

2 – Théorèmes de convergence

Exercice 1. (*Uniforme continuité de l'intégrale*) Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f:(E,\mathcal{A},\mu)\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.

1. Montrer que

$$\lim_{y\to\infty}\int_E |f|\,\mathbb{1}_{\{|f|>y\}}\,\mathrm{d}\mu=0.$$

2. Montrer que

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall A\in\mathcal{A},\mu(A)<\delta\Rightarrow\int_A |f|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 2. Soit μ une mesure finie sur $(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[))$ et $f:\ ]0,1[\to\mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Quelle est la limite de la suite $(\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}\mu(x))_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3. À l'exception de la dernière question, on donnera des exemples qui n'utilisent pas la mesure de Lebesgue.

1. Donner un exemple de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles l'inégalité est stricte dans le lemme de Fatou. Montrer qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de positivité.
2. Dans le théorème de convergence dominée, vérifier, en donnant des contre-exemples, que, si l'on oublie une hypothèse, la conclusion peut être mise en défaut.
3. Reprendre la question précédente avec le théorème de convergence monotone.
4. Construire une suite de fonctions continues f_n sur $]0,1[$, avec $0\leq f_n\leq 1$, et telle que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

   sans toutefois que la suite $(f_n(x))$ ne converge pour aucun x de $]0,1[$.

Exercice 4. (*Quand est-ce que convergence p.p. implique convergence dans $\mathcal{L}^1$?*) Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E)<\infty$. Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ est dite *uniformément intégrable* si

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{i\in I}\int_{\{|f_i|\geq c\}}|f_i|\,\mathrm{d}\mu = 0. \tag{1}$$

1. Montrer que toute famille finie de $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$ est uniformément intégrable.
2. Montrer que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :
   (a) $\sup_{i\in I}\int_E|f_i|\,\mathrm{d}\mu<\infty$,
   (b) $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0:\forall A\in\mathcal{A},\mu(A)<\eta\Rightarrow\forall i\in I,\int_A|f_i|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.
3. Montrer que si les familles $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour la famille $(f_i+g_i)_{i\in I}$.
4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions qui converge μ-p.p. vers une fonction f. Montrer qu'il exitse $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $(f_n)_{n\geq n_0}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, $f\in\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$ et

$$\int_E|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

3 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 5. Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f: E\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que f est intégrable. Étudier la convergence de la suite

$$\left(n\int_E \ln\left(1+\frac{f}{n}\right)\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. Même question lorsque $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\infty$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(E) < \infty$ et que f est une fonction complexe intégrable et telle qu'il existe $S \subset \mathbb{C}$ un fermé tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$ de mesure strictement positive on ait

$$M_A(f) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \,\mathrm{d}\mu \in S.$$

Montrer que $f(x) \in S$ pour μ-presque tout x.

Exercice 7. (*Convergence en mesure*) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite (f_n) converge vers f en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(|f - f_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

1. (*Convergence $\mathcal{L}^1$ implique convergence en mesure*) Montrer que si $\int_E |f - f_n| \mathrm{d}\mu \to 0$, alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.
2. (*Convergence μ-p.p. implique convergence en mesure*) Montrer que si $f_n \to f$ μ-p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.
3. (*Convergence en mesure implique convergence μ-p.p. d'une sous-suite*) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une sous-suite de (f_n) qui converge μ-p.p. vers f.
4. (*Un théorème de convergence dominée plus fort*) On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g \colon E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$.
   (a) Montrer que $|f| \leq g$ μ-p.p.
   (b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que
   $$\int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0.$$
5. (*L'espace $L^0(E, \mu)$*) On note $L^0(E, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.
   (a) Montrer que l'on définit une distance sur $L^0(E, \mu)$ par
   $$\delta(f, g) = \inf\{\varepsilon > 0, \mu(|f - g| > \varepsilon) \leq \varepsilon\}$$
   et que celle-ci métrise la convergence en mesure.
   (b) Montrer que $(L^0(E, \mu), \delta)$ est complet.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $L^0(E, \mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p.

Exercice 8. ($\bigstar$) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable telle que

$$\int_E \left| \mathbb{1}_{A_n} - f \right| \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \mathbb{1}_A$, μ presque partout.

Fin