TD2 : Groupes abéliens finis

Exercice 1.

Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 2.

Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 3.

1. Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Faire la liste complète de ces groupes.
2. Plus généralement, pour tout entier n, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal n ?

Exercice 4.

1. Le nombre de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_5$ est le même que le nombre de groupes abéliens de cardinal 32 à isomorphisme près. Pourquoi ?
2. Généraliser au nombre de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 5.

Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre égal à l'*exposant de* G (c'est-à-dire au ppcm des ordres des éléments de G).

Exercice 6.

Soit G un groupe et soient H et K des sous-groupes de G. On suppose que :
1. $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft G$;
2. $HK = G$;
3. $H \cap K = e$.

Montrer que G est isomorphe à $H \times K$.

Exercice 7.

Soit K un corps et soit $G \subset K^*$ un sous-groupe fini d'ordre n. On va montrer que G est un groupe cyclique.
1. Montrer que l'ordre de tout élément de G divise n.
2. Soit d un diviseur de n et $x \in G$ d'ordre d. Soit H le sous-groupe cyclique de G engendré par x. Montrer que tout élément d'ordre d est dans H.
3. On note $N(d)$ le nombre d'éléments de G d'ordre d. Montrer que $N(d) = 0$ ou $\varphi(d)$, et que $\sum_{d|n,\ d>0} N(d) = n$.
4. Conclure.

En particulier, si p est un nombre premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, et si K est un corps fini, K^* est un groupe cyclique.

Exercice 8.

Si A est un anneau, on note $A^\times$ le groupe (multiplicatif) des éléments inversibles de A.
1. Soit G un groupe monogène. Montrer que le groupe des automorphismes de G est en bijection avec l'ensemble des générateurs de G.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme de groupes $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
3. Soit p un nombre premier impair et soit $\alpha \geq 1$. Quel est l'ordre de $1+p$ dans $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$? En déduire que $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$.
4. Expliciter $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$ pour $\alpha \geq 1$.
5. En déduire $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Exercice 10.

Décomposer le groupe $G = (\mathbb{Z}/187\mathbb{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens finis.