Géométrie Différentielle, TD 2 du 21 février 2014

1. Sous-variétés et paramétrisations

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. On appelle *paramétrisation* de M une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, qui est une immersion $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de U sur un ouvert de M.

1– Montrer que M admet un recouvrement par des ouverts qui sont des images de paramétrisations.

2– Réciproquement, montrer que si X est une partie de $\mathbb{R}^n$ admettant un recouvement ouvert par des images de paramétrisations $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, où U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors X est une sous-variété de dimension p.

3– Si $\varphi_1 : U_1 \to V_1, \varphi_2 : U_2 \to V_2$ sont deux paramétrisations d'ouverts V_1, V_2 d'une sous-variété M, montrer que $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 \cap \varphi_2^{-1}(V_1) \to U_1 \cap \varphi_1^{-1}(V_2)$ est un difféomorphisme.

4– Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ est une immersion, injective, propre, avec U ouvert de $\mathbb{R}^p$, montrer que l'image de f est une sous-variété de dimension p.

5– Se convaincre qu'on ne peut retirer aucune des hypothèses sur f.

2. Intersection de sous-variétés

Soient M et N deux sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que si, pour tout $x \in M \cap N$, $T_xM + T_xN = \mathbb{R}^d$, alors $M \cap N$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$. Préciser sa dimension et son espace tangent en x. On dit alors que M et N sont **transverses**.

2– La réciproque est-elle vraie ?

3– Est-il vrai plus généralement que si $\dim(T_xM + T_xN)$ ne dépend pas de $x \in M \cap N$, alors $M \cap N$ est nécessairement une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$?

3. Polynômes

1– Montrer que l'ensemble E des polynômes ayant une unique racine, avec multiplicité n, est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_n[X]$, et indiquer sa dimension.

2– Montrer que, si $n \geqslant 2$, l'adhérence de E n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Le groupe SU_N

1– Expliquer pourquoi, pour montrer que $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_N(\mathbb{C})$, il suffit de le vérifier au voisinage de Id.

2– Montrer que $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id. Même question pour U_N.

3– $SL_N(\mathbb{C})$ et U_N sont-ils transverses en Id ?

4– Montrer que le groupe SU_N est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id.

5. Maximum

Soit $n \geqslant 2$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. On pose $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, et on définit :

$$\mathcal{E} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1\}.$$

Montrer que $f|_{\mathcal{E}}$ possède une valeur maximale et déterminer cette valeur.

6. Projections

Soit M une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension m de $\mathbb{R}^n$. Si $p \in \mathbb{R}^n$ est non nul, on note $\pi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ la projection orthogonale depuis p.

1– On suppose $n > 2m + 1$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ soit injective. On pensera à appliquer le théorème de Sard.

2– On note TM le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ constitué des (x, v) tels que $x \in M$ et v soit tangent à M en x. Montrer que TM est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et préciser sa dimension.

3– On suppose $n > 2m$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ soit immersive.

4– On suppose $n > 2m + 1$ et M compacte. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p(M)$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^{n-1}$ et π_p réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $M \to \pi_p(M)$.

7. Restriction de fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de X dans $\mathbb{R}$. On dit que f est C^∞ si, pour tout x dans X, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction lisse $g : U \to \mathbb{R}$ telle que f et g coïncident sur $X \cap U$.

1– Montrer que cette définition est équivalente à la définition par cartes dans le cas où X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2– Si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$, montrer que toute application C^∞ sur X est restriction d'une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

3– Le point précédent reste-t-il vrai pour une sous-variété quelconque ?