Géométrie Différentielle, TD 2 du 21 février 2014

1. Sous-variétés et paramétrisations

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. On appelle *paramétrisation* de M une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, qui est une immersion $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de U sur un ouvert de M.

1– Montrer que M admet un recouvrement par des ouverts qui sont des images de paramétrisations.

2– Réciproquement, montrer que si X est une partie de $\mathbb{R}^n$ admettant un recouvement ouvert par des images de paramétrisations $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, où U_i est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors X est une sous-variété de dimension p.

3– Si $\varphi_1 : U_1 \to V_1, \varphi_2 : U_2 \to V_2$ sont deux paramétrisations d'ouverts V_1, V_2 d'une sous-variété M, montrer que $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 \cap \varphi_2^{-1}(V_1) \to U_1 \cap \varphi_1^{-1}(V_2)$ est un difféomorphisme.

4– Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ est une immersion, injective, propre, avec U ouvert de $\mathbb{R}^p$, montrer que l'image de f est une sous-variété de dimension p.

5– Se convaincre qu'on ne peut retirer aucune des hypothèses sur f.

Solution :

1– Par la définition par redressement d'une sous-variété, pour tout x de M, il existe un ouvert W dans $\mathbb{R}^n$ contenant x et φ un difféomorphisme de W sur un ouvert $\varphi(W)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(W \cap M) = \varphi(W) \cap \mathbb{R}^p$, où $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}$ est plongé dans $\mathbb{R}^n$. Notons f la restriction de φ^{-1} à $U := \varphi(W) \cap \mathbb{R}^p$. Alors f est $\mathcal{C}^\infty$ comme restriction de φ^{-1} ; c'est une immersion car φ^{-1} est un difféomorphisme, et f réalise un homéomorphisme de U vers son image $f(U) = W \cap M$, qui est bien un ouvert de M.

2– Soit x un point de X et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation d'image V un ouvert de X contenant x. Par le lemme de forme normale des immersions, il existe W un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x, $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme vers un ouvert $\varphi(W)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi \circ f : U \cap f^{-1}(W) \to \mathbb{R}^n$ est de la forme $\varphi(f(x_1, \ldots, x_p)) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$. Ceci prouve que φ redresse X au voisinage de x ; donc X est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

3– D'abord, $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ realise un homéomorphisme de $W_1 := U_2 \cap \varphi_2^{-1}(V_1)$ vers $W_2 := U_1 \cap \varphi_1^{-1}(V_2)$. Ensuite, sur un voisinage ouvert W de $x \in V_1 \cap V_2$, il existe $f : W \to f(W)$ tel que $f(W \cap M) = f(W) \cap \mathbb{R}^p$. Dès lors, les $f \circ \varphi_i$ peuvent être vus comme des difféomorphismes de $U_i \cap \varphi_i^{-1}(W)$ vers $f(W \cap \varphi_i(U_i))$ (vu dans $\mathbb{R}^p$). En particulier, la composée $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 = (f \circ \varphi_1)^{-1} \circ (f \circ \varphi_2)$ est un difféomorphisme, là où il est défini.

4– Comme f est une bijection sur son image, continue et propre, c'est un homéomorphisme sur son image, en plus d'être une immersion. C'est donc une paramétrisation et donc l'image de f est une sous-variété.

5– Si on ne suppose pas l'injectivité, on peut avoir des points doubles. Si on ne suppose pas le caractère immersif, on peut avoir des angles. Si on ne suppose pas la propreté, on peut encore avoir des points doubles (penser à un serpent qui se mord le ventre infiniment lentement, cf. p. 68, Lafontaine) ou bien pire : l'image n'est pas nécessairement localement fermée (i.e. ouverte dans son adhérence). Mais les sous-variétés sont toujours localement fermées. Considérer par exemple l'application $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(y), \cos(\sqrt{2}t), \sin(\sqrt{2}t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^4$; on l'interprétera bientôt de façon plus élégante comme l'enroulement d'une droite de pente irrationnelle dans le tore à deux dimensions, même référence.

Remarque. Le troisième point de l'exercice montre qu'une sous-variété admet naturellement une structure de variété lisse, les cartes étant les réciproques des paramétrisations. En pratique, on se rappellera qu'une application entre M et N sous-variétés est lisse au voisinage de $x \in M$, s'il existe une paramétrisation φ de M au voisinage de x telle que l'application $\iota \circ f \circ \varphi$ est lisse comme application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^s$. Ici, $\iota : N \to \mathbb{R}^s$ est l'inclusion de N dans son espace ambiant.

2. Intersection de sous-variétés

Soient M et N deux sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que si, pour tout $x \in M \cap N$, $T_xM + T_xN = \mathbb{R}^d$, alors $M \cap N$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$. Préciser sa dimension et son espace tangent en x. On dit alors que M et N sont **transverses**.

2– La réciproque est-elle vraie ?

3– Est-il vrai plus généralement que si $\dim(T_xM + T_xN)$ ne dépend pas de $x \in M \cap N$, alors $M \cap N$ est nécessairement une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$?

Solution :

1– Soit $x \in M \cap N$. Par définition des sous-variétés à l'aide de submersions, on peut trouver un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^d$ et des submersions $F : U \to \mathbb{R}^{d-m}$ et $G : U \to \mathbb{R}^{d-n}$ telles que $U \cap M = \{F = 0\}$ et $U \cap N = \{G = 0\}$. Ainsi, $U \cap M \cap N$ est le lieu des zéros de $(F, G) : U \to \mathbb{R}^{2d-m-n}$.

Montrons que (F, G) est une submersion en x. Pour cela, on calcule, utilisant l'hypothèse de transversalité pour la dernière égalité :

$$\dim \operatorname{Ker} d_x(F, G) = \dim(\operatorname{Ker} d_xF \cap \operatorname{Ker} d_xG) = \dim(T_xM \cap T_xN) = m + n - d.$$

Ainsi, $\dim \operatorname{Im} d_x(F, G) = d - (m + n - d) = 2d - m - n$. Par dimension, $d_x(F, G)$ est bien surjective. On en déduit d'une part que $M \cap N$ est une sous-variété au voisinage de x, d'autre part que sa dimension est $d-(2d-m-n)=m+n-d$, et enfin que son espace tangent en x est $\{T_xF=T_xG=0\}=T_xM\cap T_xN$.

2– Non, elle est fausse : considérer l'intersection d'une sous-variété avec elle-même ! Ou bien l'intersection, dans $\mathbb{R}^4$ de deux plans se coupant le long d'une droite.

3– Non, cet énoncé est faux. On peut par exemple se placer dans $\mathbb{R}^2$, prendre pour M l'axe des abscisses, et pour N le graphe de la fonction $\mathcal{C}^\infty$, $f(x)=\exp(-1/x^2)\sin^2(1/x)$. En effet, $M\cap N$ est un ensemble dénombrable de points mais 0 n'y est pas isolé. Et, la dérivée de f est nulle quand f est nulle, d'où la condition de tangence.

3. Polynômes

1– Montrer que l'ensemble E des polynômes ayant une unique racine, avec multiplicité n, est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_n[X]$, et indiquer sa dimension.

2– Montrer que, si $n\geqslant 2$, l'adhérence de E n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1– On considère le paramétrage suivant de E : $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(a,b)=b(X-a)^n$. L'application f est injective d'image E. C'est un homéomorphisme sur son image car on dispose d'une réciproque continue $\sum a_iX^i\mapsto(-\frac{a_{n-1}}{na_n},a_n)$. De plus, on vérifie en calculant sa différentielle qu'elle est immersive. E est donc une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}_n[X]$.

2– On raisonne par l'absurde en supposant que $\bar{E}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $0\leqslant i\leqslant n$, et pour $\varepsilon>0$, $\varepsilon(X-i)^n\in E$, de sorte que $0\in\bar{E}$ et $(X-i)^n\in T_0\bar{E}$. On vérifie que les $(X-i)^n$ sont libres dans $\mathbb{R}_n[X]$ (car le déterminant de Vandermonde ne s'annule pas). Ils l'engendrent donc par dimension, ce qui montre $T_0\bar{E}=\mathbb{R}_n[X]$. L'ensemble $\bar{E}$ contient donc un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui est absurde (pour $n\geqslant 2$).

4. Le groupe SU_N

1– Expliquer pourquoi, pour montrer que $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_N(\mathbb{C})$, il suffit de le vérifier au voisinage de Id.

2– Montrer que $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id. Même question pour U_N.

3– $SL_N(\mathbb{C})$ et U_N sont-ils transverses en Id ?

4– Montrer que le groupe SU_N est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id.

Solution :

1– Supposons que $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété au voisinage de Id : c'est localement le lieu des zéros d'une submersion F. Soit alors $M \in SL_N$. Notons $L_M : M_N(\mathbb{C}) \to M_N(\mathbb{C})$ la multiplication à gauche par M. C'est un difféomorphisme d'inverse $L_{M^{-1}}$. On voit alors que $SL_N(\mathbb{C})$ est localement au voisinage de M le lieu des zéros de la submersion $F \circ L_{M^{-1}}$.

2– On calcule la différentielle en Id du déterminant : c'est la trace. Il est immédiat que l'application $\mathrm{Tr} : M_N(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est surjective, de sorte que le déterminant est une submersion au voisinage de Id. Ainsi, $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété de codimension 2 de $M_N(\mathbb{C})$ au voisinage de Id, et $T_{\mathrm{Id}}SL_N$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.

On conclut à l'aide de la question précédente.

Pour U_N, par le même raisonnement qu'à la première question, on peut se contenter de travailler au voisinage de Id. L'ensemble U_N y est une ligne de niveau de l'application $\varphi : M \mapsto {}^tM\bar{M}$ à valeur dans les matrices hermitiennes. Il suffit de montrer que c'est une submersion en Id. Pour cela, on calcule $d\varphi_{\mathrm{Id}}(H) = H + {}^t\bar{H}$. Cette application linéaire est bien surjective car, si H est une matrice hermitienne. $H = d\varphi_{\mathrm{Id}}(\frac{H}{2})$.

On en déduit que U_N est une sous-variété de $M_N(\mathbb{C})$ et que son espace tangent en Id est constitué des matrices opposées à leur « transconjuguée ».

3– On voit alors que $SL_N(\mathbb{C})$ et U_N ne sont pas transverses en Id. En effet, les espaces tangents de ceux deux variétés en ce point sont tous deux inclus dans le sous-espace vectoriel de $M_N(\mathbb{C})$ constitué des matrices de trace imaginaire pure.

4– Il suffit, toujours par l'argument de la première question, de montrer que SU_N est une sous-variété de $M_N(\mathbb{C})$ au voisinage de Id.

On introduit $E = \{M \in M_N(\mathbb{C}) | {}^tM = \bar{M}\}$, et on considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : M_N(\mathbb{C}) &\to E \times \mathbb{R} \\ M &\mapsto ({}^tM\bar{M}, \Im(\det(M))). \end{aligned}$$

On a $\Phi^{-1}(\mathrm{Id}, 0) = \{M \in U_N | \det(M) = \pm 1\}$. Ainsi, au voisinage de l'identité, $\Phi(M) = (\mathrm{Id}, 0)$ est une équation de SU_N ; il suffit donc de vérifier que Φ est une submersion en Id.

On calcule $d\Phi_{\mathrm{Id}}(H) = ({}^tH + \bar{H}, \Im(\mathrm{Tr}(H)))$. Soit alors $(M, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$. On peut trouver H_0 à trace réelle telle que $M = {}^tH_0 + \bar{H}_0$: choisir par exemple H_0 triangulaire supérieure à coefficients diagonaux réels. Notons alors H la matrice H_0 à la quelle on a rajouté $i\lambda$ au coefficient en haut à gauche. On a $d\Phi_{\mathrm{Id}}(H) = (M, \lambda)$. Cela prouve que $d\Phi_{\mathrm{Id}}$ est surjective, ce qu'on voulait.

L'espace tangent en Id de SU_N est le noyau de $d\Phi_{\mathrm{Id}} : H \mapsto ({}^tH + \bar{H}, \Im(\mathrm{Tr}(H)))$, c'est-à-dire les matrices de trace nulle opposées à leur « transconjuguée ».

5. Maximum

Soit $n \geqslant 2$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. On pose $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, et on définit :

$$\mathcal{E} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1\}.$$

Montrer que $f|_{\mathcal{E}}$ possède une valeur maximale et déterminer cette valeur.

Solution :

L'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé, et borné (car $|x_i| \leqslant \lambda_i$), donc compact. La fonction continue f y atteint donc son maximum.

Notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et posons $g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} - 1$. On calcule $dg = 4 \sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{\lambda_i^4} dx_i$, de sorte que g est submersive hors de l'origine 0. Comme $0 \notin \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ est défini localement comme lieu des zéros d'une submersion : c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point de $\mathcal{E}$ où f atteint son maximum. Par théorème des extrema liés, il existe α tel que $df_a = \alpha dg_a$. Remarquons que, comme df est non nulle hors de l'origine, $\alpha \neq 0$.

Cette relation s'écrit : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i(1 - 2\alpha \frac{a_i^2}{\lambda_i^4}) = 0$. Ainsi, notant I l'ensemble des $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $a_i \neq 0$, on a :

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^4}{\lambda_i^4} = \sum_{i \in I} \frac{a_i^4}{\lambda_i^4} = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i^4}{4\alpha^2}.$$

On calcule alors, pour $i \in I$,

$$a_i^2 = \frac{\lambda_i^4}{2\alpha} = \frac{\lambda_i^4}{\sqrt{\sum_{i \in I} \lambda_i^4}}.$$

On a alors $f(a) = \sqrt{\sum_{i \in I} \lambda_i^4}$. En particulier, $f(a) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^4}$.

Les calculs menés ci-dessus permettent de plus d'exhiber un point $a \in \mathcal{E}$ en lequel f atteint cette valeur : choisir $a_i = \frac{\lambda_i^2}{(\sum_{i=1}^n \lambda_i^4)^{1/4}}$.

On a montré que la valeur du maximum de f sur $\mathcal{E}$ est $\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^4}$.

6. Projections

Soit M une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension m de $\mathbb{R}^n$. Si $p \in \mathbb{R}^n$ est non nul, on note $\pi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ la projection orthogonale depuis p.

1– On suppose $n > 2m + 1$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ soit injective. On pensera à appliquer le théorème de Sard.

2– On note TM le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ constitué des (x, v) tels que $x \in M$ et v soit tangent à M en x. Montrer que TM est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et préciser sa dimension.

3– On suppose $n > 2m$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ soit immersive.

4– On suppose $n > 2m+1$ et M compacte. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p(M)$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^{n-1}$ et π_p réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $M \to \pi_p(M)$.

Solution :

1– On considère l'application $f : M \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x, y, t) = t(x - y)$. Par le théorème de Sard, l'image de f est de mesure nulle. On choisit p non nul hors de cette image. Ce choix de p assure l'injectivité de π_p restreint à M.

2– On fixe $(x, v) \in TM$. Soit U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que M soit défini dans U par l'équation $\{f = 0\}$ où $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ est une submersion $\mathcal{C}^\infty$. Alors TM est défini dans $U \times \mathbb{R}^n$ comme lieu des zéros de $F(x, v) = (f(x), df_x(v))$. L'application F est $\mathcal{C}^\infty$ car f l'est. De plus, $dF_{(x,v)}$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs avec deux blocs diagonaux égaux à df_x : c'est donc une submersion. On a bien montré que TM est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de codimension $2n - 2m$, donc de dimension $2m$.

3– On considère l'application $f : TM \to \mathbb{R}^n$ donnée par la deuxième projection. Par le théorème de Sard, l'image de f est de mesure nulle. On choisit p non nul hors de cette image. Ce choix de p assure qu'aucun vecteur tangent à M en un point de M n'est proportionnel à p. Cela assure que $\pi_p|_M$ est immersive.

4– Les preuves des questions 1 et 3 montrent que pour presque tout $p \in \mathbb{R}^n$, la projection $\pi_p|_M : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ est une immersion injective. On choisit un tel p.

Montrons que $\pi_p(M)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{n-1}$. Pour cela, fixons $x \in M$ et montrons que $\pi_p(M)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\pi_p(x)$. Par forme locale des immersions, on peut trouver un voisinage U de x dans M tel que $\pi_p(U)$ soit une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ au voisinage de $\pi_p(x)$. Notons $F = M \setminus U$. C'est un compact comme fermé du compact M. Ainsi $\pi_p(F)$ est compact comme image d'un compact par une application continue, et est donc fermé. De plus $\pi_p(F)$ ne contient pas $\pi_p(x)$ par injectivité de $\pi_p|_M$. Il évite donc un voisinage de $\pi_p(x)$. On a bien montré que $\pi_p(M)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\pi_p(x)$, ce qu'on voulait.

L'application $\pi_p : M \to \pi_p(M)$ est immersive entre sous-variétés de mêmes dimensions, donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local. Comme elle est de plus bijective, c'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

7. Restriction de fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de X dans $\mathbb{R}$. On dit que f est C^∞ si, pour tout x dans X, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction lisse $g : U \to \mathbb{R}$ telle que f et g coïncident sur $X \cap U$.

1– Montrer que cette définition est équivalente à la définition par cartes dans le cas où X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2– Si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$, montrer que toute application C^∞ sur X est restriction d'une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

3– Le point précédent reste-t-il vrai pour une sous-variété quelconque ?

Solution :

1– Les deux définitions étant locales, il suffit de regarder ce qui se passe autour d'un point $x \in X$. Supposons f lisse au sens des cartes. Soit U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un redressement de X tel que $\varphi(U \cap X) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p$. Alors, $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est lisse. De plus, on peut trouver un ouvert W de $\mathbb{R}^p$ et un ouvert Z de R^{n-p} tel que $W \times Z \subset \varphi(U)$. Notons g l'application de $W \times Z$ dans $\mathbb{R}$ valant $f \circ \varphi^{-1}$ sur $W \times \{0\}$ et constante sur le deuxième facteur. Cette application est évidemment lisse. Et $g \circ \varphi$ est définie sur un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ et prolonge f sur un voisinage de x dans X.

Réciproquement, il s'agit de vérifier que la restriction à $X \cap U$ d'une application lisse $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ est une application lisse dans les cartes. Ceci est clair car dans la carte obtenue par redressement, on regarde la restriction à $\mathbb{R}^p$ d'une application lisse définie sur $\mathbb{R}^n$.

2– Notons $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable de $\mathbb{R}^n$ par des ouverts vérifiant les conditions suivantes : $U_0 = \mathbb{R}^n - F$, pour $i \geqslant 1$, on a sur chaque U_i une application f_i lisse qui coïncide avec f sur $U_i \cap F$. On considère une partition de l'unité (φ_i) subordonnée à ce recouvrement : chaque φ_i est une fonction lisse à valeurs dans $[0, 1]$ de support inclus dans U_i. De plus, $\sum \varphi_i = 1$ (la somme étant localement finie). On pose $g = \sum \varphi_i f_i$, avec $f_0 = 0$; c'est une application lisse qui prolonge f.

3– Non, c'est faux. Par exemple, on ne peut pas prolonger à $\mathbb{R}$ la fonction lisse $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ définie sur $]-1, 1[$.