Géométrie Différentielle, TD 2 du 23 février 2015

1. Intersection de sous-variétés

Soient M et N deux sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que si, pour tout $x \in M \cap N$, $T_xM + T_xN = \mathbb{R}^d$, alors $M \cap N$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$. Préciser sa dimension et son espace tangent en x. On dit alors que M et N sont **transverses**.

2– La réciproque est-elle vraie ?

3– Est-il vrai plus généralement que si $\dim(T_xM + T_xN)$ ne dépend pas de $x \in M \cap N$, alors $M \cap N$ est nécessairement une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^d$?

Solution :

1– Soit $x \in M \cap N$. Par définition des sous-variétés à l'aide de submersions, on peut trouver un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^d$ et des submersions $F : U \to \mathbb{R}^{d-m}$ et $G : U \to \mathbb{R}^{d-n}$ telles que $U \cap M = \{F = 0\}$ et $U \cap N = \{G = 0\}$. Ainsi, $U \cap M \cap N$ est le lieu des zéros de $(F, G) : U \to \mathbb{R}^{2d-m-n}$.

Montrons que (F, G) est une submersion en x. Pour cela, on calcule, utilisant l'hypothèse de transversalité pour la dernière égalité :

$$\dim \operatorname{Ker} d_x(F, G) = \dim(\operatorname{Ker} d_xF \cap \operatorname{Ker} d_xG) = \dim(T_xM \cap T_xN) = m + n - d.$$

Ainsi, $\dim \operatorname{Im} d_x(F, G) = d - (m + n - d) = 2d - m - n$. Par dimension, $d_x(F, G)$ est bien surjective. On en déduit d'une part que $M \cap N$ est une sous-variété au voisinage de x, d'autre part que sa dimension est $d - (2d - m - n) = m + n - d$, et enfin que son espace tangent en x est $\{T_xF = T_xG = 0\} = T_xM \cap T_xN$.

2– Non, elle est fausse : considérer l'intersection d'une sous-variété avec elle-même ! Ou bien l'intersection, dans $\mathbb{R}^4$ de deux plans se coupant le long d'une droite.

3– Non, cet énoncé est faux. On peut par exemple se placer dans $\mathbb{R}^2$, prendre pour M l'axe des abscisses, et pour N le graphe de la fonction $\mathcal{C}^\infty$, $f(x) = \exp(-1/x^2)\sin^2(1/x)$. En effet, $M \cap N$ est un ensemble dénombrable de points mais 0 n'y est pas isolé. Et, la dérivée de f est nulle quand f est nulle, d'où la condition de tangence.

2. Polynômes

1– Montrer que l'ensemble E des polynômes ayant une unique racine, avec multiplicité n, est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_n[X]$, et indiquer sa dimension.

2– Montrer que, si $n \geqslant 2$, l'adhérence de E n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1– On considère le paramétrage suivant de E : $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(a,b) = b(X-a)^n$. L'application f est injective d'image E. C'est un homéomorphisme sur son image car on dispose d'une réciproque continue $\sum a_i X^i \mapsto (-\frac{a_{n-1}}{na_n}, a_n)$. De plus, on vérifie en calculant sa différentielle qu'elle est immersive. E est donc une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}_n[X]$.

2– On raisonne par l'absurde en supposant que $\bar{E}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, et pour $\varepsilon > 0$, $\varepsilon(X-i)^n \in E$, de sorte que $0 \in \bar{E}$ et $(X-i)^n \in T_0\bar{E}$. On vérifie que les $(X-i)^n$ sont libres dans $\mathbb{R}_n[X]$ (car le déterminant de Vandermonde ne s'annule pas). Ils l'engendrent donc par dimension, ce qui montre $T_0\bar{E} = \mathbb{R}_n[X]$. L'ensemble $\bar{E}$ contient donc un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui est absurde (pour $n \geqslant 2$).

3. Extrema liés

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application lisse.

1– Si x est un point de M, montrer que l'espace tangent T_xM s'identifie à l'ensemble des vecteurs $\dot{\gamma}(0)$, où $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ est un chemin lisse tracé sur M.

2– En déduire une condition différentielle nécessaire pour que x soit un extremum local de la restriction de f à M.

3– Application : soit $n \geqslant 2$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. On pose $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$, et on définit :

$$\mathcal{E} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1\}.$$

Montrer que $f|_{\mathcal{E}}$ possède une valeur maximale et déterminer cette valeur.

Solution :

1– Soit x dans M. Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant p et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k$, si k est la dimension de m, et tel que $\varphi(x) = 0$. Avec cette description, T_xM est le sous-espace $d_0\varphi^{-1}\mathbb{R}^k$. Si γ est un chemin tracé sur M, avec $\gamma(0) = x$, on écrit $\gamma = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$. Alors, $\dot{\gamma}(0) = d_0\varphi^{-1} \circ d_0(\varphi \circ \gamma)$ vit dans $d_0\varphi^{-1}\mathbb{R}^k$ car $\varphi \circ \gamma$ est un chemin tracé dans $\mathbb{R}^k$. Réciproquement, fixons $v \in d_0\varphi^{-1}\mathbb{R}^k$, alors $d_0\varphi(v) \in \mathbb{R}^k$. On trace dans $\mathbb{R}^k$ le chemin $\widetilde{\gamma}(t) = td_0\varphi(v)$. Alors le chemin $\varphi^{-1} \circ \widetilde{\gamma}(t)$ convient.

2– Pour que x soit un extremum local de la restriction à M de f, il est nécessaire qu'il le soit pour la restriction de f à toute courbe tracée dans M. Donc, dans ce cas, $f \circ \gamma(t)$, admet un point critique en 0, quelle que soit le courbe γ, tracée sur M et passant par x en 0. D'après le point précédent, une condition nécessaire est donc que la différentielle de f en x, soit nulle en restriction au plan tangent T_xM.

3– L'ensemble $\mathcal{E}$ est fermé, et borné (car $|x_i| \leqslant \lambda_i$), donc compact. La fonction continue f y atteint donc son maximum.

Notons $x = (x_1, \dots, x_n)$ et posons $g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} - 1$. On calcule $dg = 4 \sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{\lambda_i^4} dx_i$, de sorte que g est submersive hors de l'origine 0. Comme $0 \notin \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ est défini localement comme lieu des zéros d'une submersion : c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$ un point de $\mathcal{E}$ où f atteint son maximum. Par théorème des extrema liés, il existe α tel que $df_a = \alpha dg_a$. Remarquons que, comme df est non nulle hors de l'origine, $\alpha \neq 0$.

Cette relation s'écrit : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i(1 - 2\alpha \frac{a_i^2}{\lambda_i^4}) = 0$. Ainsi, notant I l'ensemble des $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $a_i \neq 0$, on a :

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^4}{\lambda_i^4} = \sum_{i \in I} \frac{a_i^4}{\lambda_i^4} = \sum_{i \in I} \frac{\lambda_i^4}{4\alpha^2}.$$

On calcule alors, pour $i \in I$,

$$a_i^2 = \frac{\lambda_i^4}{2\alpha} = \frac{\lambda_i^4}{\sqrt{\sum_{i \in I} \lambda_i^4}}.$$

On a alors $f(a) = \sqrt{\sum_{i \in I} \lambda_i^4}$. En particulier, $f(a) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^4}$.

Les calculs menés ci-dessus permettent de plus d'exhiber un point $a \in \mathcal{E}$ en lequel f atteint cette valeur : choisir $a_i = \frac{\lambda_i^2}{(\sum_{i=1}^n \lambda_i^4)^{1/4}}$.

On a montré que la valeur du maximum de f sur $\mathcal{E}$ est $\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^4}$.

4. Projections

Soit M une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de dimension m de $\mathbb{R}^n$. Si $p \in \mathbb{R}^n$ est non nul, on note $\pi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ la projection orthogonale depuis p.

1– On suppose $n > 2m + 1$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ soit injective. On pensera à appliquer le théorème de Sard.

2– On note TM le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ constitué des (x, v) tels que $x \in M$ et v soit tangent à M en x. Montrer que TM est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et préciser sa dimension.

3– On suppose $n > 2m$. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ soit immersive.

4– On suppose $n > 2m + 1$ et M compacte. Montrer qu'on peut trouver $p \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\pi_p(M)$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^{n-1}$ et π_p réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $M \to \pi_p(M)$.

Solution :

1– On considère l'application $f : M \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x, y, t) = t(x - y)$. Par le théorème de Sard, l'image de f est de mesure nulle. On choisit p non nul hors de cette image. Ce choix de p assure l'injectivité de π_p restreint à M.

2– On fixe $(x, v) \in TM$. Soit U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que M soit défini dans U par l'équation $\{f = 0\}$ où $f : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ est une submersion $\mathcal{C}^\infty$. Alors TM est défini dans $U \times \mathbb{R}^n$ comme lieu des zéros de $F(x, v) = (f(x), df_x(v))$. L'application F est $\mathcal{C}^\infty$ car f l'est. De plus, $dF_{(x,v)}$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs avec deux blocs diagonaux égaux à df_x : c'est donc une submersion. On a bien montré que TM est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de codimension $2n - 2m$, donc de dimension $2m$.

3– On considère l'application $f : TM \to \mathbb{R}^n$ donnée par la deuxième projection. Par le théorème de Sard, l'image de f est de mesure nulle. On choisit p non nul hors de cette image. Ce choix de p assure qu'aucun vecteur tangent à M en un point de M n'est proportionnel à p. Cela assure que $\pi_p|_M$ est immersive.

4– Les preuves des questions 1 et 3 montrent que pour presque tout $p \in \mathbb{R}^n$, la projection $\pi_p|_M : M \to \mathbb{R}^{n-1}$ est une immersion injective. On choisit un tel p.

Montrons que $\pi_p(M)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{n-1}$. Pour cela, fixons $x \in M$ et montrons que $\pi_p(M)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\pi_p(x)$. Par forme locale des immersions, on peut trouver un voisinage U de x dans M tel que $\pi_p(U)$ soit une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ au voisinage de $\pi_p(x)$. Notons $F = M \setminus U$. C'est un compact comme fermé du compact M. Ainsi $\pi_p(F)$ est compact comme image d'un compact par une application continue, et est donc fermé. De plus $\pi_p(F)$ ne contient pas $\pi_p(x)$ par injectivité de $\pi_p|_M$. Il évite donc un voisinage de $\pi_p(x)$. On a bien montré que $\pi_p(M)$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\pi_p(x)$, ce qu'on voulait.

L'application $\pi_p : M \to \pi_p(M)$ est immersive entre sous-variétés de mêmes dimensions, donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local. Comme elle est de plus bijective, c'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

5. Restriction de fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de X dans $\mathbb{R}$. On dit que f est C^∞ si, pour tout x dans X, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction lisse $g : U \to \mathbb{R}$ telle que f et g coïncident sur $X \cap U$.

1– Montrer que cette définition est équivalente à la définition par cartes dans le cas où X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2– Si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$, montrer que toute application C^∞ sur X est restriction d'une application C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

3– Le point précédent reste-t-il vrai pour une sous-variété quelconque ?

Solution :

1– Les deux définitions étant locales, il suffit de regarder ce qui se passe autour d'un point $x \in X$. Supposons f lisse au sens des cartes. Soit U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un redressement de X tel que $\varphi(U \cap X) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p$. Alors, $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est lisse. De plus, on peut trouver un ouvert W de $\mathbb{R}^p$ et un ouvert Z de R^{n-p} tel que $W \times Z \subset \varphi(U)$. Notons g l'application de $W \times Z$ dans $\mathbb{R}$ valant $f \circ \varphi^{-1}$ sur $W \times \{0\}$ et constante sur le deuxième facteur. Cette application est évidemment lisse. Et $g \circ \varphi$ est définie sur un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ et prolonge f sur un voisinage de x dans X.

Réciproquement, il s'agit de vérifier que la restriction à $X \cap U$ d'une application lisse $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ est une application lisse dans les cartes. Ceci est clair car dans la carte obtenue par redressement, on regarde la restriction à $\mathbb{R}^p$ d'une application lisse définie sur $\mathbb{R}^n$.

2– Notons $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable de $\mathbb{R}^n$ par des ouverts vérifiant les conditions suivantes : $U_0 = \mathbb{R}^n - F$, pour $i \geqslant 1$, on a sur chaque U_i une application f_i lisse qui coïncide avec f sur $U_i \cap F$. On considère une partition de l'unité (φ_i) subordonnée à ce recouvrement : chaque φ_i est une fonction lisse à valeurs dans $[0, 1]$ de support inclus dans U_i. De plus, $\sum \varphi_i = 1$ (la somme étant localement finie). On pose $g = \sum \varphi_i f_i$, avec $f_0 = 0$; c'est une application lisse qui prolonge f.

3– Non, c'est faux. Par exemple, on ne peut pas prolonger à $\mathbb{R}$ la fonction lisse $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ définie sur $]-1, 1[$.

6. Le groupe SU_N

1– Expliquer pourquoi, pour montrer que $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_N(\mathbb{C})$, il suffit de le vérifier au voisinage de Id.

2– Montrer que $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id. Même question pour U_N.

3– $SL_N(\mathbb{C})$ et U_N sont-ils transverses en Id ?

4– Montrer que le groupe SU_N est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de $M_N(\mathbb{C})$, et calculer son espace tangent en Id.

Solution :

1– Supposons que $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété au voisinage de Id : c'est localement le lieu des zéros d'une submersion F. Soit alors $M \in SL_N$. Notons $L_M : M_N(\mathbb{C}) \to M_N(\mathbb{C})$ la multiplication à gauche par M. C'est un difféomorphisme d'inverse $L_{M^{-1}}$. On voit alors que $SL_N(\mathbb{C})$ est localement au voisinage de M le lieu des zéros de la submersion $F \circ L_{M^{-1}}$.

2– On calcule la différentielle en Id du déterminant : c'est la trace. Il est immédiat que l'application $\mathrm{Tr} : M_N(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est surjective, de sorte que le déterminant est une submersion au voisinage de Id. Ainsi, $SL_N(\mathbb{C})$ est une sous-variété de codimension 2 de $M_N(\mathbb{C})$ au voisinage de Id, et $T_{\mathrm{Id}}SL_N$ est l'ensemble des matrices de trace nulle.

On conclut à l'aide de la question précédente.

Pour U_N, par le même raisonnement qu'à la première question, on peut se contenter de travailler au voisinage de Id. L'ensemble U_N y est une ligne de niveau de l'application $\varphi : M \mapsto {}^tM\bar{M}$ à valeur dans les matrices hermitiennes. Il suffit de montrer que c'est une submersion en Id. Pour cela, on calcule $d\varphi_{\mathrm{Id}}(H) = H + {}^t\bar{H}$. Cette application linéaire est bien surjective car, si H est une matrice hermitienne. $H = d\varphi_{\mathrm{Id}}(\frac{H}{2})$.

On en déduit que U_N est une sous-variété de $M_N(\mathbb{C})$ et que son espace tangent en Id est constitué des matrices opposées à leur « transconjuguée ».

3– On voit alors que $SL_N(\mathbb{C})$ et U_N ne sont pas transverses en Id. En effet, les espaces tangents de ceux deux variétés en ce point sont tous deux inclus dans le sous-espace vectoriel de $M_N(\mathbb{C})$ constitué des matrices de trace imaginaire pure.

4– Il suffit, toujours par l'argument de la première question, de montrer que SU_N est une sous-variété de $M_N(\mathbb{C})$ au voisinage de Id.

On introduit $E = \{M \in M_N(\mathbb{C}) | {}^tM = \bar{M}\}$, et on considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : M_N(\mathbb{C}) &\to E \times \mathbb{R} \\ M &\mapsto ({}^tM\bar{M}, \Im(\det(M))). \end{aligned}$$

On a $\Phi^{-1}(\mathrm{Id}, 0) = \{M \in U_N | \det(M) = \pm 1\}$. Ainsi, au voisinage de l'identité, $\Phi(M) = (\mathrm{Id}, 0)$ est une équation de SU_N ; il suffit donc de vérifier que Φ est une submersion en Id.

On calcule $d\Phi_{\mathrm{Id}}(H) = ({}^tH + \bar{H}, \Im(\mathrm{Tr}(H)))$. Soit alors $(M, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$. On peut trouver H_0 à trace réelle telle que $M = {}^tH_0 + \bar{H}_0$: choisir par exemple H_0 triangulaire supérieure à coefficients diagonaux réels. Notons alors H la matrice H_0 à la quelle on a rajouté $i\lambda$ au coefficient en haut à gauche. On a $d\Phi_{\mathrm{Id}}(H) = (M, \lambda)$. Cela prouve que $d\Phi_{\mathrm{Id}}$ est surjective, ce qu'on voulait.

L'espace tangent en Id de SU_N est le noyau de $d\Phi_{\mathrm{Id}} : H \mapsto ({}^tH + \bar{H}, \Im(\mathrm{Tr}(H)))$, c'est-à-dire les matrices de trace nulle opposées à leur « transconjuguée ».