Feuille d'exercices n^{o}2

Corrigé

Exercice 1

1. Puisque χ_k est $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, il suffit de montrer que $\underline{f} \star \eta_k$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par l'inégalité de Hölder, puisque f est dans L^p, la restriction de f (et donc de $\underline{f}$) à tout ouvert borné est L^1. Comme η_k est à support compact, cela entraîne qu'au voisinage de chaque point, $\underline{f}\star\eta_k$ s'écrit comme la convolution d'une fonction de L^1 et d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. De telles fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ (c'est une conséquence du théorème de convergence dominée).

2. Par le théorème de convergence dominée, la dérivée α-ième de $\underline{f} \star \eta_k$ est $\underline{f} \star \eta_k^{(\alpha)}$.
Pour tout $x \in \omega$:

$$\begin{aligned}\underline{f} \star \eta_k^{(\alpha)}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \underline{f}(t)\eta_k^{(\alpha)}(x-t)dt \\ &= \int_\Omega f(t)\eta_k^{(\alpha)}(x-t)dt\end{aligned}$$

La deuxième égalité est vraie seulement pour k assez grand : il faut que le support de $\eta_k^{(\alpha)}(x-.)$ soit inclus dans Ω. Puisqu'au sens des distributions, f est α-fois dérivable, on a, pour tout $x \in \omega$:

$$\underline{f} \star \eta_k^{(\alpha)}(x) = \int_\Omega f^{(\alpha)}(t)\eta_k(x-t)dt = \underline{f^{(\alpha)}} \star \eta_k(x)$$

Lorsque k est assez grand, puisque ω est borné, χ_k vaut 1 sur un voisinage de $\overline{\omega}$ donc, sur ω, $f_k^{(\alpha)} = (\underline{f} \star \eta_k)^{(\alpha)} = \underline{f^{(\alpha)}} \star \eta_k$.

3. D'après l'énoncé, on admet que $\underline{f^{(\alpha)}}\star\eta_k$ converge dans L^p vers $\underline{f^{(\alpha)}}$ lorsque k tend vers l'infini. Sur ω, la première fonction coïncide avec $f_{k|\omega}^{(\alpha)}$ pour k assez grand ; cela donne le résultat.

Exercice 2

1. a)

$$\begin{aligned}||u_*||_p^p &= \int_{x_1>0} |u(x_1,...,x_n)|^p dx + \int_{x_1<0} |u(-x_1,...,x_n)|^p dx \\ &= 2\int_\Omega |u(x)|^p dx \\ &= 2||u||_p^p\end{aligned}$$

Donc $||u_*||_p = 2^{1/p}||u||_p$. Le raisonnement qui précède s'applique à $p \neq +\infty$ mais le résultat est également valable pour $p = +\infty$.

On va maintenant montrer que u a des dérivées partielles dans L^p, qui sont, si $i = 1$:

$$\begin{aligned}\partial_i u_*(x_1, ..., x_n) &= \partial_i u(x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 > 0\\ &= 0 && \text{si } x_1 = 0\\ &= -\partial_i u(-x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 < 0\end{aligned}$$

et, si $i \neq 1$:

$$\begin{aligned}\partial_i u_*(x_1, ..., x_n) &= \partial_i u(x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 > 0\\ &= 0 && \text{si } x_1 = 0\\ &= \partial_i u(-x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 < 0\end{aligned}$$

Cela impliquera que, pour tout i, $||\partial_i u_*||_p = 2^{1/p}||\partial_i u||_p$.
Soit ϕ une fonction quelconque à support compact. On va calculer $\int_{\mathbb{R}^n} u_* \partial_i \phi$.
Soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vaut 1 sur $[-1; 1]$ et 0 en-dehors de $[-2; 2]$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\chi_k(x) = \chi(2^k x_1)$. La fonction χ_k ainsi définie est $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-2^{1-k}; 2^{1-k}] \times \mathbb{R}^{n-1}$.
On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u_* \partial_i \phi &= \int_{\mathbb{R}^n} u_* \partial_i (\phi(1 - \chi_k) + \phi \chi_k)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_* \partial_i (\phi(1 - \chi_k)) + \int_{\mathbb{R}^n} u_* (\partial_i \phi) \chi_k + \int_{\mathbb{R}^n} u_* \phi (\partial_i \chi_k)\end{aligned}$$

Puisque $| \int_{\mathbb{R}^n} u_* (\partial_i \phi) \chi_k| \leq \int_{|x_1| \leq 2^{1-k}} |u_*(\partial_i \phi)|$ et puisque $u^*(\partial_i \phi)$ est L^1, ce terme tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.
Pour $i \neq 1$, $\partial_i \chi_k = 0$ donc $\int_{\mathbb{R}^n} u_* \phi (\partial_i \chi_k) = 0$. Pour $i = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u_* \phi (\partial_i \chi_k) &= \int_{x_1 > 0} u(x_1, ..., x_n) \phi(x_1, ..., x_n) (\partial_1 \chi_k)(x_1, ..., x_n) dx\\ &\quad + \int_{x_1 < 0} u(-x_1, ..., x_n) \phi(x_1, ..., x_n) (-\partial_1 \chi_k)(-x_1, ..., x_n) dx\\ &= \int_{x_1 > 0} u(x_1, ..., x_n) \partial_1(\chi_k)(x_1, ..., x_n) (\phi(x_1, ..., x_n) - \phi(-x_1, ..., x_n)) dx\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} u_*\phi(\partial_i\chi_k)\right| &\leq \int_{x_1>0} |u(x_1,...,x_n)|\,|\partial_1(\chi_k)(x_1,...,x_n)|\,|\phi(x_1,...,x_n)-\phi(-x_1,...,x_n)|dx \\
&\leq 2||\partial_1\phi||_\infty \int_{x_1>0} |u(x_1,...,x_n)|\,|\partial_1(\chi_k)(x_1,...,x_n)|\,|x_1|\,1_{\mathrm{Supp}(\phi)}(x)dx \\
&\leq 2.2^k||\partial_1\phi||_\infty||\chi'||_\infty \int_{0<x_1<2^{1-k}} |u(x_1,...,x_n)|\,|x_1|\,1_{\mathrm{Supp}(\phi)}(x)dx \\
&\leq 2.2^k||\partial_1\phi||_\infty||\chi'||_\infty \int_{0<x_1<2^{1-k}} |u(x_1,...,x_n)|\,2^{1-k}\,1_{\mathrm{Supp}(\phi)}(x)dx \\
&= 4||\partial_1\phi||_\infty||\chi'||_\infty \int_{0<x_1<2^{1-k}} |u(x_1,...,x_n)|\,1_{\mathrm{Supp}(\phi)}(x)dx \\
&\overset{k\to+\infty}{\to} 0
\end{aligned}$$

Donc, pour tout i, $\int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i\phi = \int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i(\phi(1-\chi_k)) + o(1)$. De plus :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i(\phi(1-\chi_k)) &= \int_{x_1>0} u(x_1,...,x_n)\partial_i(\phi(1-\chi_k))(x_1,...,x_n)dx \\
&\quad + \int_{x_1<0} u(-x_1,...,x_n)\partial_i(\phi(1-\chi_k))(x_1,...,x_n)dx \\
&= \int_{x_1>0} u(x_1,...,x_n)\partial_i(\phi(1-\chi_k))(x_1,...,x_n)dx \\
&\quad + \int_{x_1>0} u(x_1,...,x_n)\partial_i(g_k)(x_1,...,x_n)dx
\end{aligned}$$

où $g_k(x_1,...,x_n) = (\phi(1-\chi_k))(-x_1,...,x_n)$ si $i \neq 1$ et $g_k(x_1,...,x_n) = -(\phi(1-\chi_k))(-x_1,...,x_n)$ si $i = 1$.
Puisque $\phi(1-\chi_k)$ et g_k sont $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans Ω :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_*\partial_i(\phi(1-\chi_k)) &= \int_{x_1>0} \partial_i u(x_1,...,x_n)\phi(1-\chi_k)(x_1,...,x_n)dx \\
&\quad + \int_{x_1>0} \partial_i u(x_1,...,x_n)g_k(-x_1,...,x_n)dx \\
&= \int_{x_1>0} \partial_i u(x_1,...,x_n)\phi(1-\chi_k)(x_1,...,x_n)dx \\
&\quad + \int_{x_1<0} \epsilon_i\partial_i u(-x_1,...,x_n)\phi(1-\chi_k)(x_1,...,x_n)dx
\end{aligned}$$

avec $\epsilon_i = 1$ si $i \neq 1$ et $\epsilon_i = -1$ si $i = 1$.

En définissant $\partial_i u_*$ comme annoncé plus haut, on a ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u_* \partial_i(\phi(1-\chi_k)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_* \phi - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_* \phi \chi_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_* \phi + o(1)\end{aligned}$$

Pour résumer, lorsque $k \to +\infty$, $\int_{\mathbb{R}^n} u_* \partial_i \phi = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_* \phi + o(1)$. Donc $\int_{\mathbb{R}^n} u_* \partial_i \phi = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_* \phi$. On a bien démontré ce qui était annoncé.
b) L'application $u \to u_*$ convient.
2. Pour toute fonction $v \in W^{1,p}(\Omega)$, on définit v_* comme précédemment et $\tilde{v}_*$ par :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_*(x_1, ..., x_n) &= v(x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 > 0 \\ &= 0 && \text{si } x_1 = 0 \\ &= v(-\tfrac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 < 0\end{aligned}$$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que $\tilde{v}_*$ est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et que ses dérivées partielles valent :

$$\begin{aligned}\partial_i \tilde{v}_*(x_1, ..., x_n) &= \partial_i v(x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 > 0 \\ &= 0 && \text{si } x_1 = 0 \\ &= -\tfrac{1}{2}\partial_i v(-\tfrac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 < 0\end{aligned}$$

si $i = 1$ et, si $i \neq 1$:

$$\begin{aligned}\partial_i \tilde{v}_*(x_1, ..., x_n) &= \partial_i v(x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 > 0 \\ &= 0 && \text{si } x_1 = 0 \\ &= \partial_i v(-\tfrac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 < 0\end{aligned}$$

Donc $u_{2,*} = 4\tilde{u}_* - 3u_*$ est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, avec des dérivées partielles qui valent, selon que i vaut 1 ou non :

$$\begin{aligned}\partial_i u_{2,*}(x_1, ..., x_n) &= \partial_i u(x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 > 0 \\ &= 0 && \text{si } x_1 = 0 \\ &= -2\partial_i u(-\tfrac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) + 3\partial_i u(-x_1, ..., x_n) && \text{si } x_1 < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_i u_{2,*}(x_1, ..., x_n) &= \partial_i u(x_1, x_2, ..., x_n) && \text{si } x_1 > 0 \\ &= 0 && \text{si } x_1 = 0 \\ &= 4\partial_i u(-\tfrac{1}{2}x_1, x_2, ..., x_n) - 3\partial_i u(-x_1, ..., x_n) && \text{si } x_1 < 0\end{aligned}$$

Pour $i \neq 1$, $\partial_i u_{2,*} = 4\widetilde{(\partial_i u)}_* - 3(\partial_i u)_*$. Comme $\partial_i u$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$, $\widetilde{(\partial_i u)}_*$ et $(\partial_i u)_*$ sont dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ donc $\partial_i u_{2,*}$ est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (par le même raisonnement que précédemment). On peut de plus calculer les dérivées partielles secondes et majorer leurs normes en fonction de la norme des dérivées partielles de u.
Pour $i = 1$, $\partial_i u_{2,*} = -2\widetilde{(\partial_i u)}_* + 3(\partial_i u)_*$ et on peut appliquer le même argument pour montrer que $\partial_1 u_{2,*}$ est également dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Cela montre que $u_{2,*}$ est dans $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ et le calcul des dérivées partielles montre que $u \in W^{2,p}(\Omega) \to u_{2,*} \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ est continue.

3. a) Soit $f \in W^{k,p}(\Omega)$. On applique à Ef la construction de l'exercice précédent, pour obtenir une suite $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

D'après la dernière question de l'exercice 1., appliquée à $\omega = \Omega \subset \mathbb{R}^n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq p$, la suite des fonctions $f_l^{(\alpha)}$, restreintes à Ω, converge vers $(Ef)^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}$ dans L^p.

b) On ne suppose plus que Ω est borné. Soit $f \in W^{k,p}(\Omega)$ quelconque. Soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $||f-g||_{W^{k,p}(\Omega)}$ est arbitrairement petite.

Soit $(\chi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ définie comme dans l'exercice 1.

Lorsque $l \to +\infty$, $||f - f\chi_l||_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$. Soit l tel que $||f - f\chi_l||_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon$.

L'ouvert $\Omega \cap B(0,4l)$ est borné. D'après la question précédente, il existe $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $||h - f\chi_l||_{W^{1,p}(\Omega\cap B(0,4l))} < \epsilon$.

Posons $g = h\chi_{2l}$. C'est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$ et montrons que $||g^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}||_{L^p(\Omega)}$ est petite.

Comme χ_{2l} vaut 1 sur $B(0,2l)$, $g^{(\alpha)}$ est égale à $h^{(\alpha)}$ sur $\Omega \cap B(0,2l)$, donc :

$$||g^{(\alpha)} - (f\chi_l)^{(\alpha)}||_{L^p(\Omega\cap B(0,2l))} \leq ||h - f\chi_l||_{W^{1,p}(\Omega\cap B(0,4l))} < \epsilon \tag{1}$$

Sur $\Omega - B(0,4l)$, $f\chi_l = 0$ et $g = 0$ (puisque $\chi_{2l} = 0$) donc :

$$||g^{(\alpha)} - (f\chi_l)^{(\alpha)}||_{L^p(\Omega - B(0,4l))} = 0 \tag{2}$$

Sur $\Omega \cap B(0,4l) - B(0,2l)$ (où $f\chi_l = 0$), on peut facilement montrer (en calculant les dérivées de g en fonction de celles de h et de χ) qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de l telle que :

$$\begin{aligned}
||g^{(\alpha)} - (f\chi_l)^{(\alpha)}||_{L^p(\Omega\cap B(0,4l)-B(0,2l))} &= ||g^{(\alpha)}||_{L^p(\Omega\cap B(0,4l)-B(0,2l))} \\
&\leq C||h||_{W^{k,p}(\Omega\cap B(0,4l)-B(0,2l))} \\
&= C||h - f\chi_l||_{W^{k,p}(\Omega\cap B(0,4l)-B(0,2l))} \\
&\leq C||h - f\chi_l||_{W^{k,p}(\Omega\cap B(0,4l))} \\
&< C\epsilon
\end{aligned} \tag{3}$$

En combinant (1), (2) et (3), on obtient :

$$||g^{(\alpha)} - (f\chi_l)^{(\alpha)}||_{L^p(\Omega)} < (C+1)\epsilon$$

En sommant sur les α tels que $|\alpha| \leq k$, on obtient qu'il existe une constante $\tilde{C} > 0$, indépendante de l et ϵ, telle que :

$$||g - (f\chi_l)||_{W^{k,p}(\Omega)} < \tilde{C}\epsilon$$

Puisque $||f - (f\chi_l)||_{W^{k,p}(\Omega)} < \epsilon$:

$$||g - f||_{W^{k,p}(\Omega)} < (1 + \tilde{C})\epsilon$$

Exercice 3

1. Pour $n = 2$, c'est vrai ; l'inégalité est même une égalité, par Fubini.
Supposons l'inégalité démontrée en dimension $n - 1 \geq 2$ et démontrons-la en dimension n.
Posons, comme suggéré dans l'énoncé :

$$g_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}) = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, t)|^{n-1} dt \right)^{1/(n-2)}$$

Pour tout $(x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, ..., x_{n-1}, t)| dt &= |f_n(x_1, ..., x_{n-1})| \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{n-1} |f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, t)| dt \\
&\leq |f_n(x_1, ..., x_{n-1})| \prod_{i=1}^{n-1} ||f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, .)||_{n-1} \\
&= |f_n(x_1, ..., x_{n-1})| \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1})^{(n-2)/(n-1)}
\end{aligned}$$

Posons $P : (x_1, ..., x_{n-1}) \to \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1})^{(n-2)/(n-1)}$ et appliquons à nouveau l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
||f||_1 &= \left|\left| (x_1, ..., x_{n-1}) \to \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, ..., x_{n-1}, t)| dt \right|\right|_1 \\
&\leq || \, |f_n| P ||_1 \\
&\leq ||f_n||_{n-1} ||P||_{(n-1)/(n-2)} \qquad (4)
\end{aligned}$$

D'après la définition de P :

$$||P||_{(n-1)/(n-2)} = \left|\left| \prod_{i=1}^{n-1} g_i \right|\right|_1^{(n-2)/(n-1)}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$||P||_{(n-1)/(n-2)} \leq \prod_{i=1}^{n-1} ||g_i||_{n-2}^{(n-2)/(n-1)} = \prod_{i=1}^{n-1} ||f_i||_{n-1}$$

Combinée avec l'équation (4), cette inégalité donne le résultat demandé.

2. Pour tout $i = 1, ..., n$, on pose :

$$f_i : (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) = \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)| dt \right)^{1/(n-1)}$$

Pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$, $|u(x)| \leq f_i(x_1, ..., x_n)^{(n-1)}$. Donc, en utilisant la question 1. :

$$\begin{aligned}
||u||_{n/(n-1)} &= ||u^{n/(n-1)}||_1^{(n-1)/n} \\
&\leq ||f_1...f_n||_1^{(n-1)/n} \\
&\leq ||f_1||_{n-1}^{(n-1)/n}...||f_n||_{n-1}^{(n-1)/n} \\
&= ||\,|\nabla u|\,||_1^{1/n}...||\,|\nabla u|\,||_1^{1/n} \\
&= ||\,|\nabla u|\,||_1
\end{aligned}$$

3. Soit $\gamma > 1$ fixé. Alors $\nabla(|u|^\gamma) = \gamma$ signe$(u)|u|^{\gamma-1}\nabla u$. En appliquant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$||u||_{\gamma n/(n-1)}^\gamma = ||\,|u|^\gamma||_{n/(n-1)} \leq \gamma||\,|u|^{\gamma-1}|\nabla u|\,||_1$$

Si on applique l'inégalité de Hölder :

$$||u||_{\gamma n/(n-1)}^\gamma \leq \gamma||\,|u|^{\gamma-1}||_{p/(p-1)}||\,|\nabla u|\,||_p = \gamma||u||_{(\gamma-1)p/(p-1)}^{\gamma-1}||\,|\nabla u|\,||_p$$

On choisit γ de sorte que :

$$\left(\frac{\gamma n}{n-1} = \frac{(\gamma-1)p}{p-1}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}\right)$$

et on obtient :

$$||u||_{pn/(n-p)} \leq \frac{p(n-1)}{n-p}||\,|\nabla u|\,||_p$$

ce qui est le résultat voulu.

4. Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ quelconque.

D'après l'exercice 2, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ vers u.

La suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^{p^*} car, pour tous k_1, k_2, d'après la question 3. :

$$||f_{k_1} - f_{k_2}||_{p^*} \leq C||\,|\nabla(f_{k_1} - f_{k_2})|\,||_p$$

et la suite $(\nabla f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^p puisqu'elle converge vers ∇u.

En plus de converger dans L^p, la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc dans L^{p^*}. Sa limite est identique dans les deux espaces : c'est u. Donc $u \in L^{p^*}$ et :

$$||u||_{p^*} = \lim_{k\to+\infty}||f_k||_{p^*} \leq C\lim_{k\to+\infty}||\,|\nabla f_k|\,||_p = C||\,|\nabla u|\,||_p$$

Exercice 4

1. Soit $f \in W^{1,p}(\Omega)$. On note $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ un opérateur de prolongement comme à l'exercice 2.

D'après la question 4. de l'exercice 3, $||Ef||_{p^*} \leq C||\nabla(Ef)||_p \leq C||Ef||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||E||\,||f||_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Puisque Ef et f coïncident sur Ω, $||f||_{p^*} \leq ||Ef||_{p^*} \leq C||E||\,||f||_{W^{1,p}(\Omega)}$.
Si $q \leq p^*$, l'inégalité de Hölder implique :

$$||f||_q \leq ||f||_{p^*}|\Omega|^{(p^*-q)/(p^*q)}$$

où $|\Omega|$ désigne le volume de Ω.
Donc, pour une certaine constante C' indépendante de f :

$$||f||_q \leq C'||f||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

2. a) Pour tout k, f_k est une fonction de L^p à support inclus dans un ouvert V borné. Par l'inégalité de Hölder, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de V telle que, pour tout k :

$$||f_k||_1 \leq C||f_k||_p$$

La convolution d'une fonction intégrable et d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (par convergence dominée). Donc, pour tout k, $f_k \star \eta_s$ est $\mathcal{C}^\infty$.
De plus, pour tout k :

$$||f_k \star \eta_s||_\infty \leq ||f_k||_1||\eta_s||_\infty \leq C||f_k||_p||\eta_s||_\infty$$

Puisque $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, la suite $(||f_k\star\eta_s||_\infty)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée. Donc $(f_k\star\eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée.
De plus :

$$\nabla(f_k \star \eta_s) = f_k \star (\nabla\eta_s)$$

Donc, par le même argument que précédemment, $(\nabla(f_k\star\eta_s))_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée. Cela entraîne que $(f_k \star \eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue.
b) D'après le théorème d'Ascoli, puisque toutes les fonctions sont à support dans $\overline{V}$, qui est compact, on peut extraire de $(f_k \star \eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge uniformément. Si elle converge uniformément, elle converge également dans $L^q(V)$.
c) Commençons par montrer que, lorsque $s \to +\infty$, $||f_k \star \eta_s - f_k||_1 \to 0$ uniformément en k.
Pour tout x :

$$\begin{aligned}
|f_k \star \eta_s(x) - f_k(x)| &= \left|\int \eta_s(t)(f_k(x-t) - f_k(x))dt\right| \\
&= \left|\int \eta_s(t)\left(\int_0^1 \langle\nabla(f_k(x-ut)), t\rangle du\right) dt\right| \\
&\leq \int |\eta_s(t)| \int_0^1 |\nabla(f_k(x-ut))|\,|t|dudt
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
||f_k \star \eta_s - f_k||_1 &\leq ||\nabla f_k||_1 \int |t||\eta_s(t)|dt \\
&= ||\nabla f_k||_1 2^{-s} \int |t||\eta(t)|dt
\end{aligned}$$

Toujours par l'inégalité de Hölder, $(\nabla f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans L^1, puisqu'elle l'est dans L^p. Cela démontrer la convergence uniforme dans L^1.
Démontrons maintenant que le résultat est encore vrai si on remplace L^1 par L^q avec $q < p^*$.
D'après la question 1., $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^{p^*}. Pour tous k, s, $||f_k \star \eta_s||_{p^*} \leq ||f_k||_{p^*}||\eta_s||_1 = ||f_k||_{p^*}$. Donc $(f_k \star \eta_s - f_k)_{k,s\in\mathbb{N}}$ est une famille bornée de $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.
Par Hölder, si on pose $\theta = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*}\right) / \left(1 - \frac{1}{p^*}\right) > 0$:

$$||f_k \star \eta_s - f_k||_q \leq ||f_k \star \eta_s - f_k||_1^{\theta}||f_k \star \eta_s - f_k||_{p^*}^{1-\theta}$$

ce qui converge vers 0 uniformément en k lorsque $s \to +\infty$.
En procédant par extraction diagonale, d'après la question 2.b), on peut trouver une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout s, $(f_{\phi(k)} \star \eta_s)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans L^q.
D'après ce qu'on vient de voir, $||f_{\phi(k)} \star \eta_s - f_{\phi(k)}||_q \to 0$ uniformément en k lorsque $s \to +\infty$.
Donc $(f_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans L^q.
3. Il suffit de montrer que, de toute suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^q(\Omega)$.
On note $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ un opérateur comme dans l'exercice 2.
Soit $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction à support compact qui vaut 1 sur un voisinage de Ω. Alors $(\chi(Ef_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, à support inclus dans un même compact, qui coïncide avec f_k sur Ω. D'après la question 2.c), il existe une extraction ϕ telle que $(\chi(Ef_{\phi(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $(f_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^q(\Omega)$.

Exercice 5

Commençons par montrer que $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^p(\Omega)$.

On traite séparément le cas $n = 1$. Dans ce cas, toute famille bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $W^{1,p}(\Omega)$ est uniformément bornée et équicontinue (car $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et donc dans $L^1(\Omega)$). D'après le théorème d'Ascoli, elle admet une sous-suite qui converge dans $(\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}), ||.||_\infty)$. Cette sous-suite converge également dans $L^p(\Omega)$.

On suppose maintenant $n \geq 2$.
Soit $p' < n$ tel que $p' \leq p$ et $p < \frac{np'}{n-p'}$. Si $p < n$, on peut prendre $p' = p$; sinon, il suffit de prendre p' proche de n.
Puisque $p' \leq p$ et puisque Ω est borné, $W^{1,p}(\Omega)$ est inclus dans $W^{1,p'}(\Omega)$. De plus, l'injection est continue.
D'après l'exercice 4, $W^{1,p'}(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^p(\Omega)$. Donc $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte également de manière compacte dans $L^p(\Omega)$.

Démontrons maintenant l'inégalité demandée en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $W^{1,p}(\Omega)$ telle que, pour tout n :

$$||u_n - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n||_p > 2^n||\nabla u_n||_p$$

Quitte à ajouter à u_n une constante bien choisie, on peut supposer $\int_\Omega u_n = 0$. On peut également normaliser u_n et supposer $||u_n||_p = 1$ pour tout n.

Dans ces conditions, $||u_n - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n||_p = 1$ pour tout n donc $||\nabla u_n||_p < 2^{-n}$ pour tout n.
En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$. Puisque l'injection vers $L^p(\Omega)$ est compacte, il existe une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(\Omega)$ vers une limite v.
Comme $(\nabla u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $L^p(\Omega)$, la suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en fait vers v dans $W^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla v = 0$ donc v est une fonction constante.
Par passage à la limite des propriétés de u_n, $\int_\Omega v = 0$ donc $v = 0$. Mais $||v||_p = \lim_{n\to+\infty} ||u_{\phi(n)}||_p = 1$. C'est absurde.

Exercice 6

1. Si $f \in W^{s,2}$ (avec la définition du début du TD), alors $f \in L^2$, donc $\hat{f} \in L^2$. De plus, pour tout j, $\partial_j^s f \in L^2$ donc $\widehat{\partial_j^s f} = (i\xi_j)^s \hat{f}$ appartient à L^2. En sommant sur j, on obtient que $||\xi||_s^s \hat{f}$ appartient à L^2, ce qui revient à dire que $|\xi|^s \hat{f}$ appartient à L^2 (où $|\xi|$ désigne la norme euclidienne usuelle), par équivalence des normes en dimension finie.
Donc $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$.
Inversement, si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq s$, $(i\xi)^\alpha \hat{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cette fonction est la transformée de Fourier de $f^{(\alpha)}$ (au sens des distributions) donc cela signifie que $f^{(\alpha)} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Donc $f \in W^{s,2}$.
Montrons maintenant l'équivalence des deux normes.
Pour toute $f \in W^{s,2}$ (avec la définition du début du TD) :

$$\begin{aligned}
||f||_{W^{s,2}}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq k} ||f^{(\alpha)}||_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\leq s} ||\widehat{f^{(\alpha)}}||_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\leq s} ||\,|\xi|^\alpha \hat{f}(\xi)||_2^2 \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\leq s} \left|\left| \left(\sqrt{1+|\xi|^2}\right)^\alpha \hat{f}(\xi)\right|\right|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha|\leq s} ||\,\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \hat{f}(\xi)||_2^2 \\
&= C||f||_{H^s}^2
\end{aligned}$$

pour $C = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathrm{Card}\{\alpha \text{ tq } |\alpha| \leq s\}$.
On a également, pour $s \geq 1$ (mais le résultat est vrai aussi pour $s = 0$, avec une constante

différente) :

$$\begin{aligned}
||f||_{W^{s,2}}^2 &\geq ||f||_2^2 + \sum_{j\leq n} ||\partial_j^s f||_2^2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\left(||\hat{f}||_2^2 + \sum_{j\leq n} ||\,|\xi_j|^s \hat{f}||_2^2\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}||(1+||\xi||_{2s}^{2s})^{1/2}\hat{f}||_2^2 \\
&\geq \frac{C}{(2\pi)^n}||(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}||_2^2 \\
&= \frac{C}{(2\pi)^n}||f||_{H^s}^2
\end{aligned}$$

pour une certaine constante $C > 0$.

2. On remarque d'abord :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(x+z)|^2}{|z|^{n+2s}}dxdz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{||f-\widehat{f(.+z)}||_2^2}{|z|^{n+2s}}dz \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\omega)|^2\frac{|1-e^{i\omega.z}|^2}{|z|^{n+2s}}d\omega dz
\end{aligned}$$

Si on pose $G(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|1-e^{i\omega.z}|^2}{|z|^{n+2s}}dz$, on vérifie que cette fonction est bien définie et (par changement de variable) qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^n, R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), G(R\omega) = G(\omega)$$
$$\forall \omega \in \mathbb{R}^n, a > 0, G(a\omega) = a^{2s}G(\omega)$$

Il existe donc une constante $C_s > 0$ telle que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, $G(\omega) = C_s|\omega|^{2s}$. Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy = \frac{C_s}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\omega|^{2s}|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

donc les deux définitions sont équivalentes.

3. Pour toute fonction $g \in L^2 \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}^{-1}(g)$ est continue est bornée. De plus, (cela se vérifie à partir de la formule d'inversion) :

$$||\mathcal{F}^{-1}(g)||_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^n}||g||_1$$

Soit $s > n/2$ fixé. Notons $h : \xi \to (1+|\xi|^2)^{-s/2}$. Cette fonction appartient à L^2 donc, pour toute $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$||\mathcal{F}f||_1 = ||h(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f||_1 \leq ||h||_2||(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f||_2 = ||h||_2||f||_{H^s}$$
$$\Rightarrow ||f||_\infty \leq \frac{||h||_2}{(2\pi)^n}||f||_{H^s}$$

Exercice 7

1. a) Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact.
Pour tout x', la fonction $t \to |u(t,x')|^p$ est continue. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement aux points où elle est nulle. Sa dérivée vaut $t \to \text{signe}(u(t,x'))|u(t,x')|^{p-1}\partial_1 u(t,x')$.
On en déduit, en utilisant le fait que u est à support compact :

$$|u(0,x')|^p \leq \int_{\mathbb{R}} |u(t,x')|^{p-1}|\partial_1 u(t,x')|dt$$

et, en intégrant sur x' puis en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\int |u(0,x')|^p dx' &\leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{p-1}|\partial_1 u(x)|dx \\ &\leq ||\partial_1 u||_p ||u||_p^{p-1}\end{aligned}$$

D'où :

$$\left(\int |u(0,x')|^p dx'\right)^{1/p} \leq ||\partial_1 u||_p^{1/p} ||u||_p^{1-1/p} \leq \max(||u||_p, ||\partial_1 u||_p) \leq ||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

b) D'après l'exercice 2, la restriction à Ω des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact forme un sous-ensemble dense de $W^{1,p}(\Omega)$. De plus, d'après la question 1.a), l'opérateur $u \to u(0,.) \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, défini sur ce sous-ensemble dense, est uniformément continu pour la norme $||.||_{W^{1,p}(\Omega)}$. Il admet donc un unique prolongement à $W^{1,p}(\Omega)$.

2. Si u est $\mathcal{C}^\infty$, à support compact inclus dans Ω, alors $\gamma(u) = 0$. Puisque γ est continue, γ est nulle sur l'adhérence de cet ensemble de fonctions, c'est-à-dire que $\gamma(u) = 0$ pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Réciproquement, soit u tel que $\gamma(u) = 0$. Montrons $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
On commence par un lemme qu'on prouvera plus tard.

Lemme 7.1. *Soit $u_* \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la fonction qui vaut u sur Ω et 0 sur $\mathbb{R}^n - \Omega$. Alors $u_* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Pour tout $\epsilon > 0$, on pose u_ϵ la fonction suivante :

$$\begin{aligned}u_\epsilon(x_1, ..., x_n) &= u_*(x_1, ..., x_n) \text{ si } x_1 < \epsilon \\ &= u_*(2\epsilon - x_1, x_2, ..., x_n) \text{ si } x_1 \geq \epsilon\end{aligned}$$

De la même manière qu'à l'exercice 2, on montre que u_ϵ appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et que $||u_\epsilon||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||u_{*|]-\infty;\epsilon]\times\mathbb{R}^{n-1}}||_{W^{1,p}(]-\infty;\epsilon]\times\mathbb{R}^{n-1})}$, pour une constante C indépendante de ϵ. Puisque u_* est nulle sur $]-\infty; 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$, cela entraîne que, lorsque ϵ tend vers 0 :

$$||u_\epsilon||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \tag{5}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, $u - u_\epsilon$ est nulle sur $[0; \epsilon] \times \mathbb{R}^{n-1}$. En convolant cette fonction avec des suites régularisantes (comme dans l'exercice 4), on peut trouver une suite $(f_{\epsilon,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[\epsilon/2; +\infty[\times\mathbb{R}^{n-1}$ telle que :

$$||f_{\epsilon,k} - (u - u_\epsilon)||_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0 \quad \text{quand } k \to +\infty$$

Quitte à les tronquer correctement, on peut supposer de plus que ces fonctions sont à support compact. En combinant cette propriété avec l'équation (5), on obtient le résultat voulu.

Preuve du lemme. On va montrer que les dérivées partielles de u_* coïncident avec celles de u sur Ω et sont nulles sur le complémentaire de Ω.
Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $||u - v_k||_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$.
Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Soit $j \leq n$. Calculons $\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_j\phi)u_*$. On traite le cas $j = 1$; le cas $j > 1$ est similaire mais plus simple.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_1\phi)u_* &= \int_\Omega(\partial_1\phi)u \\ &= \lim_{k\to+\infty}\int_\Omega(\partial_1\phi)v_k \\ &= \lim_{k\to+\infty} -\int_\Omega \phi(\partial_1 v_k) + \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}\phi v_k \\ &= -\int_\Omega\phi(\partial_1 u) + \lim_{k\to+\infty}\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}\phi v_k \\ &= -\int_\Omega\phi(\partial_1 u)\end{aligned}$$

En effet, pour tout k, $\left|\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}\phi v_k\right| \leq ||\phi(0,.)||_{p/(p-1)}||\gamma(v_k)||_p$. Or $\gamma(v_k) \to 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$, puisque $v_k \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, γ est continue et $\gamma(u) = 0$. Donc $\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}\phi v_k \to 0$. $\square$

3. Il suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour toute $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$||u(0,.)||_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C||u||_{H^s(\Omega)}$$

On pourra ensuite conclure comme en 1.b) en utilisant la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ (qui est une conséquence de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et de la définition de $H^s(\mathbb{R}^n)$).
Soit donc $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour tous $x_1, \xi_2, ..., \xi_n \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$f(x_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \mathcal{F}((x_2, ..., x_n) \to f(x_1, x_2, ..., x_n))(\xi_2, ..., \xi_n)$$

Si on fixe $\xi_2, ..., \xi_n$, la fonction $x_1 \to f(x_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ a pour transformée de Fourier $\xi_1 \to \hat{u}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Donc, en appliquant la formule d'inversion :

$$f(0, \xi_2, ..., \xi_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{u}(\xi_1, ..., \xi_n)d\xi_1$$

ce qui entraîne, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}|f(0, \xi_2, ..., \xi_n)|^2 &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\hat{u}(\xi_1, ..., \xi_n)|d\xi_1\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}(\xi_1, ..., \xi_n)|d\xi_1\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi_1, ..., \xi_n)|^2d\xi_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^s}d\xi_1\right)\end{aligned}$$

On vérifie par un changement de variable dans l'intégrale qu'il existe une constante D dépendant seulement de s telle que, pour tout $\xi_2, ..., \xi_n$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi_1 = D(1+|\xi_2|^2 + ... + |\xi_n|^2)^{1/2-s}$$

Donc :

$$|f(0,\xi_2,...,\xi_n)|^2(1+|\xi_2|^2+...+|\xi_n|^2)^{s-1/2} \leq \frac{D}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi_1,...,\xi_n)|^2 d\xi_1$$

Lorsqu'on intègre sur $\xi_2, ..., \xi_n$, on trouve :

$$||u(0,.)||_{H^{s-1/2}} = ||f(0,\xi)(1+|\xi|^2)^{(s-1/2)/2}||_2 \leq \sqrt{\frac{D}{2\pi}}||u||_{H^s}$$