**Processus aléatoires** Thomas Budzinski
*ENS Paris*, 2018-2019 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

# TD 2 : Vecteurs gaussiens, construction du mouvement brownien

Mercredi 19 Septembre

## 1 Vecteurs gaussiens

On rappelle qu'un vecteur aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est gaussien si pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)$, la variable $u \cdot X$ est gaussienne. En notant $\mu = \mathbb{E}[X]$ la *moyenne* de $X$ et $K = (\mathrm{cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$ sa *matrice de covariance*, on a alors pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ :

$$\mathbb{E}\left[e^{iu \cdot X}\right] = \exp\left(iu \cdot \mu - \frac{1}{2} {}^t u K u\right).$$

**Exercice 1** Soient $X$, $Y$ et $\varepsilon$ trois variables aléatoires indépendantes avec $X$ et $Y$ gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2}$. Lesquels des vecteurs suivants sont gaussiens ?

1. $(X, \varepsilon)$
2. $(X, Y)$
3. $(X, \varepsilon X)$
4. $(X, \varepsilon Y)$
5. $(\varepsilon|X|, \varepsilon|Y|)$
6. $(X, X+Y)$
7. $(X, X+\varepsilon Y)$
8. $(X, \varepsilon X + Y)$

**Exercice 2** Soit $K$ une matrice symétrique positive. Expliquer comment simuler un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $K$ à partir de variables gaussiennes indépendantes.

**Exercice 3** Soit $\xi$ une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $x > 0$.

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\xi > x) \leq e^{-x^2/2}$.

**Exercice 4** Soit $(\xi_n)$ une suite de variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ qui converge en loi vers une variable aléatoire $X$. Montrer que $X$ est gaussienne.

**Exercice 5** Construire des variables $X$, $Y$ et $Z$ telles que les vecteurs $(X, Y)$, $(Y, Z)$ et $(Z, X)$ soient gaussiens mais pas le vecteur $(X, Y, Z)$.

**Exercice 6** (Formule de Wick) Soit $(X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{d} X_i\right] = \sum_{\pi} \prod_{\{a,b\}\in\pi} \mathbb{E}\left[X_a X_b\right],$$

où la somme se fait sur toutes les partitions $\pi$ de $[\![1, d]\!]$ en parties de taille 2.

# 2 Comment identifier la loi d'un processus ?

Soit $T > 0$. On munit l'espace $\mathcal{C}([0, T])$ des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme infinie, et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0, T]))$ associée à cette norme. On rappelle (TD de la semaine dernière, exercice 1) que la tribu borélienne est aussi la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0, T])$ qui rend mesurables les projections $x \to x_t$ pour tout $t \in [0, T]$.

**Exercice 7** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0, T])$. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et tous $t_1, \ldots, t_k \in [0, T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \qquad \text{et} \qquad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k})$$

ont la même loi. Montrer que $X$ et $Y$ ont la même loi.

**Exercice 8** En déduire que si $X$ vérifie les trois conditions suivantes:

(i) pour tous $t_1, \ldots, t_k \geq 0$ le vecteur $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ est un vecteur gaussien,

(ii) pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[X_t] = 0$,

(iii) pour tous $s, t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[X_s X_t] = \min(s, t)$,

alors $X$ a la loi d'un mouvement brownien.

**Remarque** Dans la suite, on pourra admettre que les exercices 7 et 8 restent vrais en remplaçant $\mathcal{C}([0, T])$ par l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d$, ou par l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$ (muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et de la tribu borélienne associée). Ce n'est pas un résultat difficile, il suffit d'adapter l'exercice 1 du TD1 à ces cas.

# 3 Plein de mouvements browniens !

**Exercice 9** Soit $B$ un mouvement brownien et $a > 0$. Montrer que les processus suivants sont des mouvements browniens :

- $X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}\right)_{t \geq 0}$,
- $Y = \left(t B_{1/t}\right)_{t \geq 0}$,
- $Z = \left(B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} \, \mathrm{d}s\right)_{t \geq 0}$.

**Exercice 10** (Mouvement brownien sur $\mathbb{R}^+$) Soit $\left((B_t^n)_{t \in [0,1]}\right)_{n \geq 0}$ une suite de mouvements browniens sur $[0,1]$ indépendants. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$\left(B_t = \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} B_1^n\right) + B_{t - \lfloor t \rfloor}^{\lfloor t \rfloor}.$$

Vérifier que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\mathbb{E}\left[B_s B_t\right] = \min\left(s, t\right).$$

**Exercice 11** (Mouvement brownien $d$-dimensionnel) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère $d$ mouvements browniens indépendants $B^1, \ldots, B^d$ et on pose $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $Q$ une matrice orthogonale. Montrer que $QB = (QB_t)_{0 \leq t \leq 1}$ a la même loi que $B$.

## 4 Jolie image

**Exercice 12** Que représente la jolie image ci-dessous ?