Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2018-2019 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 2 : Vecteurs gaussiens, construction du mouvement brownien
Corrigé

Mercredi 19 Septembre

1 Vecteurs gaussiens

Exercice 1 Soient X, Y et ε trois variables aléatoires indépendantes avec X et Y gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathbb{P}(\varepsilon=-1)=\mathbb{P}(\varepsilon=1)=\frac{1}{2}$. Lesquels des vecteurs suivants sont gaussiens ?

1. (X,ε)
2. (X,Y)
3. $(X,\varepsilon X)$
4. $(X,\varepsilon Y)$
5. $(\varepsilon|X|,\varepsilon|Y|)$
6. $(X,X+Y)$
7. $(X,X+\varepsilon Y)$
8. $(X,\varepsilon X+Y)$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Les vecteurs 2, 4, 6 et 7 sont gaussiens. Les vecteurs 2 et 4 le sont car ils ont leurs deux coordonnées indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Les vecteurs 6 et 7 le sont car ils sont les images respectivement des vecteurs 2 et 4 par une application linéaire.

Le vecteur 1 n'est pas gaussien car sa seconde coordonnée ne l'est pas. Le vecteur 3 ne l'est pas car $\mathbb{P}(X+\varepsilon X=0)=\frac{1}{2}$ donc la somme de ses deux coordonnées n'est pas gaussienne. Pour montrer que le vecteur 8 ne l'est pas, on peut par exemple calculer la fonction caractéristique de la somme de ses coordonnées :

$$\mathbb{E}\left[e^{iu((1+\varepsilon)X+Y)}\right]=\frac{1}{2}\left(1+e^{-u^2}\right)\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour montrer que le vecteur 5 ne l'est pas, on peut soit calculer aussi sa fonction caractéristique, soit remarquer que $(\varepsilon|X|,\varepsilon|Y|)$ a une densité strictement positive sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ mais une probabilité nulle d'être dans $\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^+$.

Exercice 2 Soit K une matrice symétrique positive. Expliquer comment simuler un vecteur gaussien centré de matrice de covariance K à partir de variables gaussiennes indépendantes.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Soit d la taille de la matrice K et soit $Z=(Z_1,\dots,Z_d)$, où les Z_i sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Notons que Z est un vecteur gaussien de matrice de covariance identité. On cherche à construire notre vecteur de manière linéaire à partir de Z. Plus précisément, soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ une matrice $d\times d$ et soit $X=AZ$. Notons que toute combinaison linéaire des coordonnées de X est une combinaison linéaire des coordonnées de Z, donc est gaussienne, donc X est un vecteur gaussien.

De plus, pour tous $1 \leq i, j \leq d$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_i X_j] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_k a_{i,k} Z_k\right)\left(\sum_\ell a_{j,\ell} Z_\ell\right)\right] \\
&= \sum_{k,\ell} a_{i,k} a_{j,\ell}\, \mathbb{E}\left[Z_k Z_\ell\right] \\
&= \sum_{k,\ell} a_{i,k} a_{j,\ell}\, \mathbb{1}_{k=\ell} \\
&= \sum_k a_{i,k} a_{j,k},
\end{aligned}$$

donc la matrice de covariance de X est $A^t A$. Il nous suffit donc de trouver A telle que $A^t A = K$. Or, comme K est symétrique positive, il existe une matrice orthogonale Q telle que $K = {}^t Q D Q$, où D est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_n \geq 0$. On peut alors prendre $A = {}^t Q \sqrt{D} Q$, où $\sqrt{D}$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}$.

Exercice 3 Soit ξ une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $x > 0$.

1. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}\left(\xi > x\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$.

2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\xi > x\right) \leq e^{-x^2/2}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. On calcule la dérivée du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^2}\left(1 + x^2\right) e^{-x^2/2} \\
&\leq -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

   et, comme $\mathbb{P}\left(\xi > x\right) = \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$, on obtient la borne supérieure en intégrant entre x et $+\infty$. De même, la dérivée du membre de gauche est

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{3}{x^4}\right) e^{-x^2/2} \\
&\geq -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

   et on obtient la borne inférieure en intégrant entre x et $+\infty$.

2. Si on pose $f(x) = e^{-x^2/2} - \mathbb{P}\left(\xi > x\right)$ alors $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - x\right) e^{-x^2/2}$ donc f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, +\infty\right[$. Comme on a aussi $f(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ on en déduit que f est positive sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4 Soit (ξ_n) une suite de variables gaussiennes sur $\mathbb{R}$ qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que X est gaussienne.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On passe par la fonction caractéristique : pour tout n, on note μ_n l'espérance et σ_n^2 la variance de ξ_n. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_{\xi_n}(u) = \exp\left(i\mu_n u - \frac{\sigma_n^2 u^2}{2}\right) \longrightarrow \varphi_X(u)$. En prenant $u = 1$ et en considérant le module, on obtient que $\exp\left(-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)$ converge donc σ_n^2 converge vers σ^2.

On en déduit que $e^{i\mu_n u}$ converge pour tout u donc μ_n converge vers $\mu \in \mathbb{R}$ (c'est le théorème de Lévy pour des variables déterministes), donc $\varphi_{\xi_n}(u) \longrightarrow \exp\left(i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$ donc X est bien gaussienne (éventuellement de variance nulle).

Exercice 5 Construire des variables X, Y et Z telles que les vecteurs (X,Y), (Y,Z) et (Z,X) soient gaussiens mais pas le vecteur (X,Y,Z).

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Prendre par exemple $(X,Y,Z) = (\varepsilon_1|\xi_1|, \varepsilon_2|\xi_2|, \varepsilon_1\varepsilon_2|\xi_3|)$ avec ε_1, ε_2, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 indépendantes, les ξ_i gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et les ε_i uniformes sur $\{-1,1\}$.

Il est facile de vérifier que X, Y et Z ont pour loi $\mathcal{N}(0,1)$ et que deux d'entre elles sont toujours indépendantes. En particulier, deux d'entre elles forment toujours un vecteur gaussien. En revanche, si (X,Y,Z) était un vecteur gaussien, alors X, Y et Z seraient indépendantes, ce qui est faux, par exemple car $\mathbb{P}(X>0, Y>0, Z<0) = 0$ et $\mathbb{P}(X>0)\,\mathbb{P}(Y>0)\,\mathbb{P}(Z<0) = \frac{1}{8}$.

Exercice 6 (Formule de Wick) Soit $(X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien centré. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d X_i\right] = \sum_\pi \prod_{\{a,b\}\in\pi} \mathbb{E}\left[X_a X_b\right],$$

où la somme se fait sur toutes les partitions π de $[\![1,d]\!]$ en parties de taille 2.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Soit Z un vecteur gaussien de matrice de covariance identité. Alors il existe une matrice A telle que X a la même loi que AZ (cf. Exercice 2). La formule qu'on veut montrer peut donc se mettre sous la forme

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d f_i(Z)\right] = \sum_\pi \prod_{\{a,b\}\in\pi} \mathbb{E}\left[f_a(Z) f_b(Z)\right],$$

où les f_i sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^d$. Or, cette dernière formule est linéaire en chacune des f_i, donc il suffit de la prouver dans le cas où chaque f_i est de la forme $z \to z_j$. Autrement dit, il suffit de montrer que pour tous $j_1, \dots, j_k$, on a

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^d Z_{j_i}\right] = \sum_\pi \prod_{\{a,b\}\in\pi} \mathbb{E}\left[Z_{j_a} Z_{j_b}\right]. \tag{1}$$

Pour tout $j \in [\![1,d]\!]$, on note k_j le nombre de i tels que $j_i = j$. Alors par indépendance des Z_j, le membre de droite vaut

$$\prod_{j=1}^d \mathbb{E}\left[Z^{k_j}\right],$$

où Z est une variable gaussienne centrée de variance 1. Remarquons tout d'abord que si un des k_j est impair, on a $\mathbb{E}[Z^{k_j}] = 0$ donc le membre de gauche dans (1) est nul. D'autre part, si π est une partition de $[\![1,d]\!]$ en paires, une des paires contient un nombre impair de i tel que $j_i = j$. Soit $\{a,b\}$ cette paire. Alors $j_a \neq j_b$, donc $\mathbb{E}[Z_{j_a} Z_{j_b}] = 0$, donc la contribution de π est nulle. Comme c'est vrai pour tout π, le membre de droite est aussi nul. On suppose donc désormais que tous les k_j sont pairs, et on écrit $k_j = 2\ell_j$.

Les moments de Z se calculent par exemple par intégration par partie, et on obtient $\mathbb{E}\left[Z^{2\ell}\right] = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, donc le membre de gauche de (1) vaut

$$\prod_{j=1}^d \frac{(2\ell_j)!}{2^{\ell_j}\ell_j!}.$$

Il reste à étudier le membre de droite de (1). Soit π une partition en paires et $\{a,b\} \in \pi$. Si $j_a \neq j_b$, alors Z_{j_a} et Z_{j_b} sont indépendantes donc $\mathbb{E}[Z_{j_a} Z_{j_b}] = 0$ et la contribution de π s'annule. Si $j_a = j_b$ pour tout $\{a,b\} \in \pi$, alors la contribution de π vaut 1, donc il suffit de compter le nombre de π qui contribuent. Choisir un tel π revient, pour tout j, à partitionner en paires les i tels que $j_i = j$. Or, le nombre de partitions en paires d'un ensemble à 2ℓ éléments vaut $(2\ell-1)\times(2\ell-3)\times\cdots\times 3\times 1 = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}$, donc le nombre de π qui contribuent à la somme vaut

$$\prod_{j=1}^{d} \frac{(2\ell_j)!}{2^{\ell_j}\ell_j!},$$

d'où (1), d'où le résultat.

2 Comment identifier la loi d'un processus ?

Soit $T>0$. On munit l'espace $\mathcal{C}([0,T])$ des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme infinie, et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0,T]))$ associée à cette norme. On rappelle (TD de la semaine dernière, exercice 1) que la tribu borélienne est aussi la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0,T])$ qui rend mesurables les projections $x \to x_t$ pour tout $t \in [0,T]$.

Exercice 7 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0,T])$. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et tous $t_1,\ldots,t_k \in [0,T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \qquad \text{et} \qquad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k})$$

ont la même loi. Montrer que X et Y ont la même loi.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> C'est une conséquence du rappel ci-dessus et du lemme de classe monotone. D'après le rappel, la tribu $\mathcal{C}([0,T])$ est engendrée par les événements de la forme $\{X_t \in A\}$ avec $t \in [0,T]$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, donc par les événements de la forme

$$\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \ldots, X_{t_k} \in A_k\} \tag{2}$$

avec $t_1,\ldots,t_k \in [0,T]$ et $A_1,\ldots,A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. De plus, les événements de la forme (2) sont stables par intersections finies. D'après le lemme de classe monotone, la classe monotone qu'ils engendrent est donc $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0,T]))$. Or, l'ensemble des $\mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{C}([0,T]))$ tels que $\mathbb{P}(X \in \mathbf{A}) = \mathbb{P}(Y \in \mathbf{A})$ est une classe monotone (c'est une vérification facile), qui contient les $\mathbf{A}$ de la forme (2) d'après l'hypothèse de l'énoncé. On a donc $\mathbb{P}(X \in \mathbf{A}) = \mathbb{P}(Y \in \mathbf{A})$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}([0,T]))$, donc X et Y ont la même loi.

Exercice 8 En déduire que si X vérifie les trois conditions suivantes:

(i) pour tous $t_1,\ldots,t_k \geq 0$ le vecteur $(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$ est un vecteur gaussien,

(ii) pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[X_t] = 0$,

(iii) pour tous $s,t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[X_s X_t] = \min(s,t)$,

alors X a la loi d'un mouvement brownien.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Soit B un mouvement brownien et $t_1,\ldots,t_k \in [0,T]$: d'après l'exercice précédent, il suffit de vérifier que $(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$ a la même loi que $(B_{t_1},\ldots,B_{t_k})$. Or, les deux sont des vecteurs gaussiens d'après l'hypothèse (i) et on sait que la loi d'un vecteur gaussien est entièrement déterminée par son espérance et par sa matrice de covariance. Or, d'après l'hypothèse (ii) on a $\mathbb{E}[X_{t_i}] = \mathbb{E}[B_{t_i}] = 0$ pour tout i, et d'après l'hypothèse (iii) on a $\mathbb{E}\left[X_{t_i}X_{t_j}\right] = \mathbb{E}\left[B_{t_i}B_{t_j}\right] = \min(t_i,t_j)$ pour tous i et j, donc on peut conclure.

Remarque Dans la suite, on pourra admettre que les exercices 7 et 8 restent vrais en remplaçant $\mathcal{C}([0,T])$ par l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$, ou par l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$ (muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et de la tribu borélienne associée). Ce n'est pas un résultat difficile, il suffit d'adapter l'exercice 1 du TD1 à ces cas.

3 Plein de mouvements browniens !

Exercice 9 Soit B un mouvement brownien et $a > 0$. Montrer que les processus suivants sont des mouvements browniens :

- $X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}\right)_{t \geq 0}$,
- $Y = \left(t B_{1/t}\right)_{t \geq 0}$,
- $Z = \left(B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s}\, \mathrm{d}s\right)_{t \geq 0}$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Il est facile de vérifier que les deux premiers processus sont gaussiens et centrés. Il suffit donc de vérifier les covariances :

- $\mathbb{E}\left[X_s X_t\right] = \frac{1}{a} \min(as, at) = \min(s,t)$ donc X est bien un mouvement brownien
- $\mathbb{E}\left[Y_s Y_t\right] = st \min\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right) = \min(s,t)$ donc Y est bien un mouvement brownien

Pour le troisième, on commence par vérifier que l'intégrale converge. On a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{|B_s|}{s} \mathrm{d}s\right] = \int_0^t \frac{1}{s} \mathbb{E}\left[|B_s|\right] \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\mathbb{E}\left[|B_1|\right]}{\sqrt{s}} \mathrm{d}s < +\infty$$

donc $\int_0^t \frac{|B_s|}{s} \mathrm{d}s < +\infty$ p.s. donc Z est bien défini p.s. De plus, soient $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. En écrivant l'intégrale $\int_0^t \frac{B_s}{s}\, \mathrm{d}s$ comme limite de sommes de Riemann, on voit que $\alpha_1 Z_{t_1} + \cdots + \alpha_k Z_{t_k}$ est une limite p.s. de combinaisons linéaires de valeur de B, donc une limite p.s. de variables gaussiennes, donc une limite en loi de variables gaussiennes. Or, une limite en loi de variables gaussiennes est gaussienne (exercice 4), donc $\alpha_1 Z_{t_1} + \cdots + \alpha_k Z_{t_k}$ est gaussienne. Le processus Z est donc gaussien et il est facile de vérifier qu'il est centré. Il n'y a donc plus qu'à calculer les covariances. En supposant $s \leq t$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_s Z_t\right] &= \min(s,t) - \int_0^s \frac{\min(t,u)}{u}\, \mathrm{d}u - \int_0^t \frac{\min(s,u)}{u}\, \mathrm{d}u + \int_0^s \int_0^t \frac{\min(u,r)}{ur}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}r \\
&= s - s - \int_0^s \frac{\min(s,u)}{u}\, \mathrm{d}u - \int_s^t \frac{\min(s,u)}{u}\, \mathrm{d}u + \int_0^s \int_0^s \frac{\min(u,r)}{ur}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}r + \int_0^s \int_s^t \frac{\min(u,r)}{ur}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}r \\
&= -s - s \ln \frac{t}{s} + 2 \int_{0 \leq u \leq r \leq s} \frac{1}{r}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}r + \int_0^s \int_s^t \frac{1}{u}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}r \\
&= -s - s \ln \frac{t}{s} + 2 \int_0^s \frac{r}{r} dr + s \ln \frac{t}{s} \\
&= -s + 2s = s.
\end{aligned}$$

Exercice 10 (Mouvement brownien sur $\mathbb{R}^+$) Soit $\left((B_t^n)_{t \in [0,1]}\right)_{n \geq 0}$ une suite de mouvements browniens sur $[0,1]$ indépendants. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$\left(B_t = \sum_{n=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} B_1^n\right) + B_{t - \lfloor t \rfloor}^{\lfloor t \rfloor}.$$

Vérifier que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\mathbb{E}\left[B_s B_t\right] = \min\left(s,t\right).$$

Solution de l'exercice 10 En développant B_sB_t et en intervertissant somme et espérance, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B_sB_t\right] &= \sum_{m=0}^{\lfloor s\rfloor-1}\sum_{n=0}^{\lfloor t\rfloor-1}\mathbb{E}\left[B_1^mB_1^n\right]+\sum_{m=0}^{\lfloor s\rfloor-1}\mathbb{E}\left[B_1^mB_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lfloor t\rfloor}\right]+\sum_{n=0}^{\lfloor t\rfloor-1}\mathbb{E}\left[B_{s-\lfloor s\rfloor}^{\lfloor s\rfloor}B_1^n\right]+\mathbb{E}\left[B_{s-\lfloor s\rfloor}^{\lfloor s\rfloor}B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lfloor t\rfloor}\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor\min(s,t)\rfloor-1}\mathbb{E}\left[(B_1^n)^2\right]+\mathbb{1}_{\lfloor t\rfloor\leq\lfloor s\rfloor-1}\mathbb{E}\left[B_1^{\lfloor t\rfloor}B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lfloor t\rfloor}\right]+\mathbb{1}_{\lfloor s\rfloor\leq\lfloor t\rfloor-1}\mathbb{E}\left[B_1^{\lfloor s\rfloor}B_{s-\lfloor s\rfloor}^{\lfloor s\rfloor}\right]\\ &+ \mathbb{1}_{\lfloor s\rfloor=\lfloor t\rfloor}\mathbb{E}\left[B_{s-\lfloor s\rfloor}^{\lfloor s\rfloor}B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lfloor t\rfloor}\right],\end{aligned}$$

en supprimant les termes qui sont nuls par indépendance de B^m et B^n pour $m\neq n$. En utilisant les covariances des B^n on obtient finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[B_sB_t\right] &= \lfloor\min(s,t)\rfloor+\mathbb{1}_{\lfloor t\rfloor<\lfloor s\rfloor}(t-\lfloor t\rfloor)+\mathbb{1}_{\lfloor s\rfloor<\lfloor t\rfloor}(s-\lfloor s\rfloor)+\mathbb{1}_{\lfloor s\rfloor=\lfloor t\rfloor}\min\left(s-\lfloor s\rfloor,t-\lfloor t\rfloor\right)\\ &= \min(s,t).\end{aligned}$$

Exercice 11 (Mouvement brownien d-dimensionnel) Soit $d\in\mathbb{N}^*$. On considère d mouvements browniens indépendants $B^1,\dots,B^d$ et on pose $B_t=(B_t^1,\dots,B_t^d)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Soit Q une matrice orthogonale. Montrer que $QB=(QB_t)_{0\leq t\leq 1}$ a la même loi que B.

Solution de l'exercice 11 On note $X=QB$, et $X_t=(X_t^1,\dots,X_t^d)$ ses coordonnées. On cherche à montrer que la loi jointe de $(X^1,\dots,X^d)$ est celle de d mouvements browniens indépendants. Pour cela, d'après l'exercice 8, il suffit de montrer que les marginales de dimension finies des X^i sont indépendantes, et ont la même loi que pour des mouvements browniens. Or, pour tous $t_1,\dots,t_k$, les $X_{t_j}^i$ avec $1\leq i\leq d$ et $1\leq j\leq k$ forment un vecteur gaussien centré (car c'est l'image d'un vecteur gaussien par une application linéaire), donc il suffit de vérifier que pour tous $1\leq i,j\leq d$ et $s,t\in[0,1]$, on a

$$\mathbb{E}\left[X_s^iX_t^j\right]=\mathbb{1}_{i=j}\min(s,t).$$

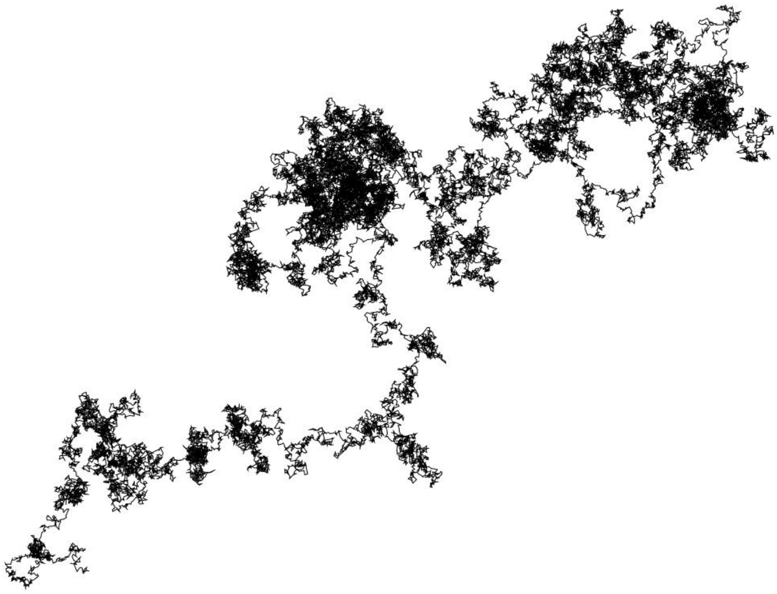
Or, on a $X_s^i=(QB_s)^i=\sum_{k=1}^d q_{ik}B_s^k$, et on a une formule similaire pour X_t^j. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_s^iX_t^j\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^d q_{ik}B_s^j\right)\left(\sum_{\ell=1}^d q_{j\ell}B_t^\ell\right)\right]\\ &= \sum_{k,\ell}q_{ik}q_{j\ell}\mathbb{E}\left[B_s^kB_t^\ell\right]\\ &= \sum_{k,\ell}q_{ik}q_{j\ell}\mathbb{1}_{k=\ell}\min(s,t)\\ &= \min(s,t)\sum_k q_{ik}q_{jk}\\ &= \min(s,t)(Q^tQ)_{i,j}\\ &= \mathbb{1}_{i=j}\min(s,t).\end{aligned}$$

car Q est orthogonale. Cela conclut.

4 Jolie image

Exercice 12 Que représente la jolie image ci-dessous ?



Solution de l'exercice 12 Il s'agit d'un mouvement brownien bidimensionnel. Plus précisément, c'est une marche aléatoire de longueur 40000 dont les incréments sont gaussiens des vecteurs gaussiens centrés, de matrice de covariance identité.