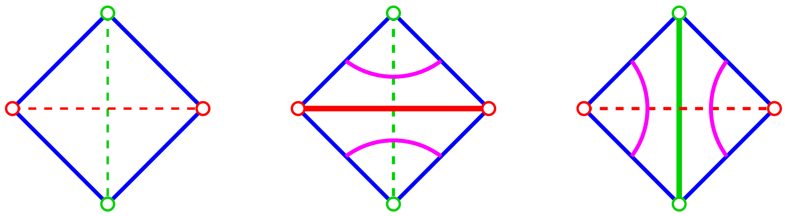
# Aspects rigoureux de la mécanique statistique à l'équilibre
# TD n° 2 : corrigé

Jérémie Bouttier et Guilhem Semerjian

Mars 2013

## 1 Dualité dans le modèle de Potts et la FK-percolation

1. On peut observer que le graphe bleu est un graphe plan car, par construction, ses arêtes ne se coupent pas. Il est également connexe. C'est une *quadrangulation*, car chaque face a 4 côtés, comme on peut le voir sur le schéma suivant (figure de gauche) :



En particulier, l'ensemble des sommets de la quadrangulation est $V \cup V^* \simeq V \cup F$, et son ensemble de faces est en bijection avec $E \simeq E^*$ (on note $\simeq$ pour dire que les ensembles sont en bijection). La quadrangulation est *bicoloriée* en rouge et vert (i.e. toute arête relie un sommet rouge à un sommet vert) [1].
On observe de plus que la quadrangulation est indépendante de $\omega$, i.e. de l'état ouvert ou fermé des arêtes du graphe rouge de départ. L'état des arêtes est lui-même codé dans les boucles, comme on peut voir sur le schéma ci-dessus (figures de droite).

2. Il convient de préciser un peu le sens de la question. Si on se donne une quadrangulation bicoloriée en rouge/vert, munie d'une configuration de boucles construite selon les règles ci-dessus (les boucles ne se coupent pas, chaque arête de la quadrangulation est coupée par une boucle et une seule) alors elle possède clairement un unique antécédent $(G, \omega)$. En ce sens, la transformation est bijective. Si on part de $(G^*, \omega^*)$, alors on obtient la même quadrangulation dans laquelle les couleurs rouge et vert ont été échangées (il n'y aurait donc pas bijectivité si on "oublie" les couleurs).

3. On écrit la relation d'Euler pour une composante connexe $\mathcal{C}$ de $\omega$ :

$$|V(\mathcal{C})| - |E(\mathcal{C})| + |F(\mathcal{C})| = 2$$

où $V(\mathcal{C}), E(\mathcal{C}), F(\mathcal{C})$ désignent [2] les ensembles respectifs de sommets, arêtes et faces de $\mathcal{C}$. En sommant sur $\mathcal{C}$ on aboutit à une relation équivalant à celle voulue :

$$|V| - |\omega| + L = 2C(\omega)$$

1. En fait, cela n'est pas une restriction importante, car toute quadrangulation plane est bicoloriable : il suffit de se donner la couleur d'un seul sommet et toutes les autres couleurs sont déterminées de proche en proche (il n'y a jamais d'obstruction, car dans une quadrangulation plane tous les cycles ont longueur paire).
2. C'est par habitude de la terminologie anglophone que nous employons les lettres $V$ (*vertices*) et $E$ (*edges*).

car tout sommet de $V$ est dans une et une seule composante connexe, de même que pour toute arête *ouverte*, et enfin on observe que chaque face d'une composante connexe donne lieu à une boucle et une seule.

4. Par la relation précédente on réécrit :

$$q^{C(\omega)}v^{|\omega|} = q^{L/2}(v/\sqrt{q})^{|\omega|}q^{|V|/2}$$

qui est un poids dépendant de la configuration de boucles (en notant que $|\omega|$ est le nombre de faces où les boucles ne séparent pas les deux sommets rouges, cf schéma ci-dessus).

5. On peut réécrire de même le poids d'une configuration duale $\omega^*$ comme :

$$q^{C(\omega^*)}(v^*)^{|\omega^*|} = q^{L/2}(v^*/\sqrt{q})^{|\omega^*|}q^{|V^*|/2}$$

et on note que $|\omega^*| = |E| - |\omega|$, et surtout que le nombre de boucles n'est pas changé !
On observe alors que si $vv^* = q$, on a :

$$\begin{aligned} q^{C(\omega^*)}(v^*)^{|\omega^*|} &= q^{L/2}(v/\sqrt{q})^{|\omega|-|E|}q^{|V^*|/2} \\ &= q^{C(\omega)}v^{|\omega|}(v^*/v)^{|E|/2}q^{(|V^*|-|V|)/2} \end{aligned}$$

qui est bien proportionnel à $q^{C(\omega)}v^{|\omega|}$ avec une constante de proportionnalité indépendante de $\omega$. En sommant sur $\omega$ (ce qui équivaut à sommer sur $\omega^*$), on obtient une relation entre $Z_G$ et $Z_{G^*}$ qu'on peut réécrire de manière symétrique sous la forme :

$$\frac{Z_G(q,\beta)}{q^{|V|/2}v^{|E|/2}} = \frac{Z_{G^*}(q,\beta^*)}{q^{|V^*|/2}(v^*)^{|E^*|/2}}$$

où $\beta, \beta^*$ sont reliés par la relation de dualité héritée de $vv^* = q$ :

$$(e^{\beta}-1)(e^{\beta^*}-1) = q.$$

La relation pour les "porosités" est :

$$\frac{p}{1-p}\frac{p^*}{1-p^*} = q.$$

On peut remarquer que lorsque $\beta$ croît de 0 à $+\infty$, $\beta^*$ décroît de $+\infty$ à 0, en ce sens la dualité relie haute et basse température.

6. (Non traitée)

7. Si $G$ est la boîte carrée de côté $2n$, on voit que

$$|V| \sim |F| \sim |E|/2 \sim 4n^2$$

lorsque $n \to \infty$. On observe que $G^*$ est essentiellement identique à $G$, modulo des conditions de bord dont on admet qu'elles sont négligeables. Ainsi, $f(\beta)$ est également la limite de $\frac{1}{\beta|V^*|}\ln Z_{G^*}(q,\beta)$ pour $n \to \infty$.
En passant au logarithme dans la relation de dualité et par les équivalents ci-dessus, il vient

$$-\beta f(\beta) - \ln(e^{\beta}-1) = -\beta^* f(\beta^*) - \ln(e^{\beta^*}-1).$$

D'après notre hypothèse, le membre de gauche possède une unique singularité en $\beta_c \in (0,\infty)$, et par conséquent elle doit coïncider avec celle du membre de droite. On en déduit que $\beta_c$ est point fixe de la transformation de dualité :

$$\beta_c = \ln(1+\sqrt{q}), \qquad p_c = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}.$$

Pour $q = 1$ on retrouve le seuil de la percolation $p_c = 1/2$, pour $q = 2$ on retrouve la température critique du modèle d'Ising $\beta_c = \ln(1+\sqrt{2}) = \operatorname{asinh}(1)$ (cela diffère d'un facteur 2 par rapport à l'expression vue en cours, liée au fait qu'on retrouve en fait le modèle d'Ising à partir du modèle de Potts en “doublant” la température).

# 2 Exercices sur la percolation

## 2.1 Percolation par arêtes sur $\mathbb{Z}^2$ à $p = 1/2$

1. On observe tout d'abord que $U_n \cap \mathbb{Z}^2$ est (quasiment) dual à $\tilde{U}_n \cap (\mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2))$ avec $\tilde{U}_n = [-n+1/2, n-1/2] \times [-1/2, 2n-1/2]$. En particulier, il existe un *croisement* de $U_n$ (i.e. un chemin ouvert dans $U_n$ reliant le bord gauche au bord droit) si et seulement si la configuration duale $\omega^*$ ne contient aucun chemin dans $\tilde{U}_n$ reliant le bord haut au bord bas. Comme $U_n$ et $\tilde{U}_n$ diffèrent d'un quart de tour et qu'on se place au point auto-dual $p = 1/2$, on déduit que $A_n$ a la même probabilité que son complémentaire, et donc $\mathbb{P}_p(A_n) = 1/2$.
Comme tout croisement part d'un chemin du bord gauche, on a
$$A_n = \bigcup_{x \in \{-n\} \times [0, 2n-1]} \{x \leftrightarrow \{n\} \times [0, 2n-1]\}$$
$$\subset \bigcup_{x \in \{-n\} \times [0, 2n-1]} \{x \leftrightarrow x + \partial\Lambda_{2n}\}$$
d'où
$$\mathbb{P}_p(A_n) \leq \sum_{x \in \{-n\} \times [0, 2n-1]} \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow x + \partial\Lambda_{2n}) = (2n)\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{2n})$$
ce qui donne l'inégalité voulue.
2. Comme tout croisement passe par un certain sommet $x$ d'abcisse nulle, et définit deux chemins (arêtes-)disjoints reliant respectivement $x$ au bord gauche et au bord droit, on déduit que $C_n(x) \circ C_n(x)$ est réalisé pour ce $x$, et donc
$$A_n \subset \bigcup_{x \in \{0\} \times [0, 2n-1]} (C_n(x) \circ C_n(x))$$
et la relation voulue s'ensuit par invariance par translation. Par l'inégalité BK on déduit que
$$\mathbb{P}_p(C_n(0)) \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

## 2.2 Percolation sur un arbre $m$-aire infini

1. Par analogie avec le réseau carré, notons $\Lambda_n$ la boule de rayon $n$ centrée en $\emptyset$, c'est-à-dire l'ensemble des mots de longueur $\leq n$. Sa frontière $\partial\Lambda_n$ est formée de l'ensemble des mots de longueur $n$. Notons $A_n$ l'évènement $\{\emptyset \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$, on observe que $(A_n)_{n\geq 0}$ forme une famille décroissante d'évènements, dont l'intersection est l'évènement $\{\emptyset \leftrightarrow \infty\}$ dont on cherche à calculer la probabilité. Celle-ci est donc égale à $\lim_{n\to\infty} \pi_n$ où $\pi_n$ est la probabilité de $A_n$.
Pour $n > 0$, on observe que $\emptyset \leftrightarrow \partial\Lambda_n$ si et seulement si il existe (au moins un) $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ (i.e. un sommet à profondeur 1) tel que les deux conditions suivantes sont réalisées :
– l'arête $\emptyset - i$ est ouverte,

– il existe un chemin ouvert *descendant* reliant $i$ à $\partial\Lambda_n$.
Ces deux évènements sont indépendants, de probabilités respectives $p$ et $\pi_{n-1}$ (car le sous-arbre issu de $i$ est lui-même un arbre $m$-aire). De plus, pour les différentes valeurs de $i$, tous ces évènements sont également indépendants. On en déduit la relation fondamentale

$$\pi_n = 1 - (1 - p\pi_{n-1})^m$$

ce qui caractérise par récurrence la suite $(\pi_n)_{n\geq 0}$ à partir de la condition initiale $\pi_0 = 1$.
On sait par ailleurs que $(\pi_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante, elle converge donc vers une limite qui est nécessairement point fixe de $f : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto 1 - (1 - px)^m$. Pour identifier ce point fixe, observons que $f$ est une fonction strictement croissante et concave telle que $f(0) = 0$ et $f(1) < 1$. Par concavité $x \mapsto f(x)/x$ est strictement décroissante (et continue), d'où on déduit que :
– si $f'(0) = mp \leq 1$, alors 0 est l'unique point fixe de $f$,
– si $f'(0) = mp > 1$, alors il existe un (et un seul) autre point fixe $\pi^* \in (0,1)$.
Dans le premier cas, on a donc $\pi_n \to 0$ pour $n \to \infty$. Dans le second cas, comme $\pi_0 = 1 > \pi^*$, on obtient par récurrence que $\pi_n > \pi^*$ pour tout $n$, donc $\pi_n$ ne peut pas tendre vers 0, d'où $\pi_n \to \pi^*$.
En résumé, la probabilité que $\emptyset$ soit dans une composante infinie est nulle si $mp \leq 1$, et non-nulle (égale à $\pi^*$) si $mp > 1$. On déduit que $p_c = 1/m$ est le seuil de percolation.

2. Il y a plusieurs manières de faire, on peut par exemple s'intéresser au $n$-ième sommet sur la branche gauche de l'arbre, qu'on notera $0^n$ (le mot formé par 0 répété $n$ fois), et considérer l'évènement $E_n$ réalisé si et seulement si :
– l'arête $0^n - 0^{n+1}$ est fermée,
– il existe un chemin ouvert descendant infini issu de $0^n$.
En raisonnant comme précédemment on voit que $E_n$ a probabilité $(1-p)(1-(1-p\pi^*)^{m-1}) > 0$ pour $p \in (p_c, 1)$, de plus les $E_n$ sont clairement indépendants car dépendant d'ensembles d'arêtes disjoints. Par Borel-Cantelli, il existe presque sûrement une infinité de valeurs de $n$ telles que $E_n$ est réalisé, et on conclut en observant que pour tout $n$ tel que $E_n$ est réalisé, $0^n$ est dans une composante infinie mais celle-ci ne contient aucun $0^m$ avec $m > n$.