TD 3 – Mesure de Lebesgue et construction de mesures

1 – Petites questions

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue finie est-il borné ?
2. Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Existe-t-il un ouvert dense de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue nulle ?
4. Existe-t-il un ouvert dense de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue strictement inférieure à 1 ?

2 – Intégration par rapport à la mesure de Lebesgue

Exercice 1. (*Théorème fondamental de l'analyse*)

1.(a) Soit f une fonction dérivable sur $]0,1[$, continue en 0 et en 1 et de dérivée f' bornée sur $]0,1[$. Montrer que
$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0).$$

(b) Montrer qu'on ne peut pas remplacer l'hypothèse "f dérivable sur $]0,1[$" par "f dérivable presque partout sur $]0,1[$".

2. Soit $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f :]a,b[\to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est *calculus-intégrable* s'il existe $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ de dérivée f et alors on pose
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a).$$

(a) Trouver une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$ qui n'est pas calculus-intégrable.

(b) Trouver une fonction calculus-intégrable sur $[0,1]$ qui n'est pas Lebesgue-intégrable.

(c) On dit que f est *Cauchy-Lebesgue-intégrable* sur $[a,b]$ s'il existe $a = a_0 < \cdots < a_N = b$ tels que, pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, il existe une suite croissante d'intervalles $(I_n^i)_{n\geq 0}$ telle que $\bigcup_{n\geq 0} I_n^i =]a_{i-1}, a_i[$, f est Lebesgue-intégrable sur I_n^i pour tout $n \geq 0$ et
$$\int_{I_n^i} f(x)\,\mathrm{d}x$$
converge quand $n \to \infty$ et alors on pose
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^N \lim_{n\to\infty} \int_{I_n^i} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Trouver une fonction calculus-intégrable sur $[0,1]$ qui n'est pas Cauchy-Lebesgue-intégrable.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

3 – Construction de mesures

Exercice 2. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. On suppose que pour tous $a < b$, f est intégrable sur $]a, b[$ et

$$\int_{]a,b[} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

4 – Mesures régulières

Exercice 3. (*Régularité des mesures boréliennes*) Soit (E, d) un espace métrique et μ une mesure sur $(E, \mathcal{B}(E))$. On dit que μ est *extérieurement régulière* si, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\}.$$

On dit que μ est *intérieurement régulière* si, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, K \subset A\}.$$

Enfin, on dit que μ est *régulière* si elle est extérieurement et intérieurement régulière.

1. Montrer que si μ est finie, alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\} \\ &= \sup\{\mu(F) : F \text{ fermés}, F \subset A\}. \end{aligned}$$

   Indication. On pourra montrer que l'ensemble des boréliens A vérifiant les deux égalités est une tribu contenant les ouverts de E.

2. Que se passe-t-il si μ est seulement supposée σ-finie ?
3. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est régulière.

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 4. Soit μ et ν deux mesures positives boréliennes sur $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tous $a < b \in \mathbb{R}$,

$$\mu(]a, b[) \leq \nu(]a, b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Indication. Utiliser la question 1 de l'exercice 3.

Exercice 5. (*Ensembles de Cantor*) Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, 1[$, et soit $K_0 = [0, 1]$. On définit une suite d'ensembles $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K := \bigcap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.

3. On note K^3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que

$$K^3 = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

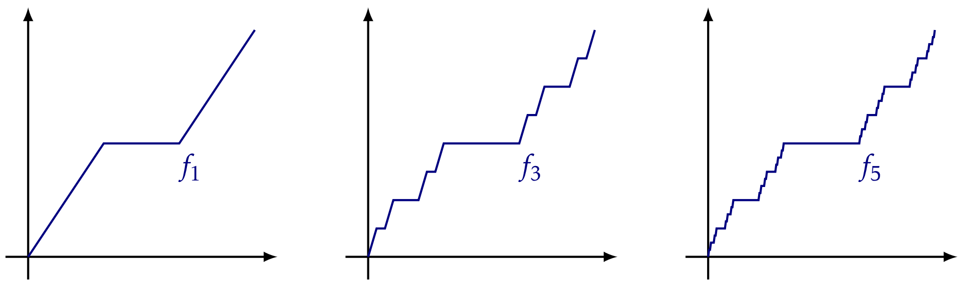
et qu'il est de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 6. (*L'escalier du diable*) On considère $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par :

- ▷ Pour $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$.
- ▷ La fonction f_1 est la fonction affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en 1, et $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.
- ▷ On passe de même de f_n à f_{n+1} en remplaçant f_n sur chaque intervalle $[u,v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction affine par morceaux qui vaut $\frac{1}{2}(f_n(u) + f_n(v))$ sur $\left[\frac{2u+v}{3}, \frac{2v+u}{3}\right]$.

On note K^3 l'ensemble de Cantor triadique défini dans l'exercice 5.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ continue croissante.
2. Montrer que si $]a,b[\subset (K^3)^c$ alors f est constante sur $]a,b[$.
3. En déduire que f est presque partout dérivable de dérivée nulle.



Exercice 7. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue.

1. Deux compacts homéomorphes de $\mathbb{R}$ ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
2. (✯) Existe-t-il un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I, on ait les inégalités strictes $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$?

Fin