TD3 : Actions de groupes

Exercice 1.

On fait agir $\mathfrak{S}_3$ sur lui-même par conjugaison : $g \cdot x = gxg^{-1}$. Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Exercice 2.

On fait agir un groupe de cardinal 143 sur un ensemble à 108 éléments. Démontrer qu'il existe un point fixe pour cette action.

Exercice 3.

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. En considérant l'ensemble

$$E := \{(g,x) \in G \times X : g \cdot x = x\},$$

calculer le nombre moyen de point fixes d'un élément de G.
Que dire en particulier si l'action est transitive ? Que dire de la moyenne du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire ?

Exercice 4.

Combien y a-t-il de colliers différents formés de 9 perles dont 4 bleues, 3 blanches et 2 rouges ?
On considérera que deux colliers sont identiques si l'on obtient l'un à partir de l'autre en le tournant (par une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{9}$), en le renversant, ou en effectuant une combinaison de ces mouvements.

Exercice 5.

Soit G un groupe fini et soit p un nombre premier divisant le cardinal de G. En utilisant une action convenable de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble

$$X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$$

prouver que G admet un élément d'ordre p **(lemme de Cauchy)**.

Exercice 6.

Soit G un groupe.

1. On suppose que G est fini et on note p le plus petit nombre premier divisant le cardinal de G. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.
2. On suppose que G est infini et qu'il admet un sous-groupe strict H d'indice fini. Montrer que G n'est pas un groupe simple.

Exercice 7.

1. Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Rappeler pourquoi $\mathrm{PGL}(E)$ agit fidèlement sur l'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des droites de E.
2. Soit q une puissance d'un nombre premier et $n \geq 2$. Construire un morphisme de groupes injectif $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q) \to \mathfrak{S}_N$ avec $N := \frac{q^n-1}{q-1}$.
3. Identifier les groupes $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ pour $n = 2$ et $q = 2, 3, 4, 5$ (on note $\mathbb{F}_q$ un corps à q éléments).
4. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$.

Exercice 8.

Une action d'un groupe G sur un ensemble X est réputée *n-transitive* si G agit transitivement sur l'ensemble des n-uplets d'éléments distincts de X, i.e. si pour tous n-uplets $(x_i)_{i=1}^n$ et $(y_i)_{i=1}^n$ d'éléments distincts de X, il existe $g \in G$ tel que $gx_i = y_i$ pour tout i.
Soit K un corps.

1. Montrer que l'action de $\mathrm{PGL}_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$ est 3-transitive. Est-elle 4-transitive ?
2. Pour $n = 1, 2, 3$, décrire le quotient $\mathrm{PGL}_2(K) \setminus \mathbb{P}^1(K)^{[n]}$ (i.e. l'ensemble des orbites) où $\mathbb{P}^1(K)^{[n]}$ désigne l'ensemble des n-uplets de points deux-à-deux distincts de $\mathbb{P}^1(K)$.

3. Montrer que l'on a une bijection naturelle $\mathrm{PGL}_2(K)\backslash(\mathbb{P}^1(K)^{[3]}\times\mathbb{P}^1(K)) \to \mathbb{P}^1(K)$. Cette bijection est notée $(a,b,c,d)\mapsto [a,b,c,d]$ et $[a,b,c,d]$ est appelé le birapport des points a,b,c,d.
4. Expliciter la bijection précédente via l'identification $\mathbb{P}^1(K)\cong K\cup\{\infty\}$.

Exercice 9.

1. Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se restreint en une action du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)>0\}\subseteq\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
2. Montrer que cette action est fidèle. Identifier le stabilisateur de $i\in\mathcal{H}$.
3. Soit G un groupe agissant sur un espace topologique X. Une partie F de X est appelée *domaine fondamental* pour l'action de G sur X si elle vérifie :

$$\text{(i) } \overline{F^\circ}=F, \quad \text{(ii) } X=\bigcup_{h\in G} hF, \quad \text{(iii) } \forall g\in G\setminus\{1\}\,,\, F^\circ\cap(gF)^\circ=\emptyset.$$

Soit $D=\{z\in\mathcal{H} \ : \ |\mathrm{Re}(z)|\leq \frac{1}{2}, |z|\geq 1\}$.

(a) En maximisant la partie imaginaire des éléments d'une orbite $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\cdot z$, montrer que D vérifie la propriété (ii).

(b) Montrer que D est un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$.

(c) En déduire que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ engendrent $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 10.

1. Montrer que si G est un groupe fini et H un sous-groupe strict de G, alors la réunion des conjugués de H n'est pas égale à G tout entier. Que dire si le groupe G est infini et si H est d'indice fini dans G ? Et si on ne suppose plus H d'indice fini ?
2. Soit G un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini X tel que $|X|\geq 2$. Montrer qu'il existe $g\in G$ ne fixant aucun point de X.

Exercice 11.

Soit G un groupe fini non trivial agissant sur un ensemble fini X. On suppose que pour tout $g\neq e\in G$, il existe un unique $x\in X$ tel que $g\cdot x=x$. On souhaite montrer que X admet un point fixe sous G (nécessairement unique).

1. On note $Y:=\{x\in X : \mathrm{Stab}_G(x)\neq\{e\}\}$. Montrer que Y est stable par G.
2. On note $n=|Y/G|$ et $y_1,\ldots,y_n$ un système de représentants de Y/G. Pour tout i, on note m_i le cardinal de $\mathrm{Stab}_G(y_i)$. En considérant l'ensemble $Z:=\{(g,x)\in(G\setminus\{e\})\times X : g\cdot x=x\}$, montrer que

$$1-\frac{1}{|G|}=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m_i}\right).$$

3. En déduire que $n=1$.
4. Conclure.

Exercice 12.

1. Soit G un p-groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note X^G l'ensemble des points fixes de X sous G. Montrer que

$$|X^G|\equiv|X| \ (\text{mod. } p)\,.$$

2. Soit G un p-groupe agissant sur un ensemble fini X dont le cardinal n'est pas divisible par p. Montrer que X admet un point fixe sous G.
3. Soit G un p-groupe fini et $H\neq\{e\}$ un sous-groupe distingué de G. Montrer que l'intersection de H avec le centre de G n'est pas réduite à l'élément neutre.
4. Montrer qu'un groupe d'ordre p^n admet des sous-groupes d'ordre p^i pour tout $0\leq i\leq n$.
5. Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. On souhaite montrer que p est somme de deux carrés d'entiers. On note

$$X:=\{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3 : x^2+4yz=p\}\,.$$

(a) On définit $i : X \to X$ par les formules suivantes

$$i : (x,y,z) \mapsto \begin{array}{l} (x+2z, z, y-x-z) \text{ si } x < y-z\,, \\ (2y-x, y, x-y+z) \text{ si } y-z < x < 2y\,, \\ (x-2y, x-y+z, y) \text{ si } x > 2y\,. \end{array}$$

Vérifier que i est bien définie.

(b) Montrer que i est une involution.

(c) Montrer que i a un unique point fixe.

(d) Montrer que $|X|$ est impair.

(e) Montrer que l'application $j : X \to X$ définie par $j(x,y,z) := (x,z,y)$ admet un point fixe.

(f) Conclure.

Exercice 13.

Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes finis admettant exactement n classes de conjugaison.

Exercice 14.

1. Calculer le groupe des isométries directes (resp. indirectes) d'un tétraèdre régulier dans l'espace euclidien de dimension trois (on pourra regarder l'action de ce groupe sur les sommets du tétraèdre).
2. Mêmes questions pour un cube et un octaèdre (on pourra regarder l'action du groupe des isométries du cube sur les diagonales de ce cube).
3. Mêmes questions pour un dodécaèdre et un icosaèdre (on pourra regarder l'action du groupe des isométries du dodécaèdre sur les "grands cubes" inscrits dans ce dodécaèdre).

Exercice 15.

Soit K un corps et $d \geq 1$ un entier. Soit p un nombre premier inversible dans K et soit G un p-groupe opérant sur l'ensemble K^d.

1. Si K est fini, démontrer que l'action de G sur K^d admet un point fixe.
2. On suppose que $K = \mathbb{C}$ et que G opère par *automorphismes polynomiaux*, c'est-à-dire que pour chaque $g \in G$, il existe des polynômes $G_1, \ldots, G_d$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ en d variables tels que

$$\forall x \in \mathbb{C}^d,\ g(x) = (G_1(x), \ldots, G_d(x)).$$

Démontrer que l'action de G sur $\mathbb{C}^d$ admet un point fixe.

On pourra admettre le résultat suivant. Si A est un anneau commutatif de type fini sur $\mathbb{Z}$, alors il existe un homomorphisme $A \to \mathbb{C}$ si et seulement si il existe une infinité de nombre premiers ℓ tels qu'il existe un homomorphisme $A \to L$ avec L un corps fini de caractéristique ℓ.

Exercice 16

L'existence d'un isomorphisme de groupes entre $\mathfrak{S}_5$ et $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ a été mentionnée en cours. On se propose d'en construire un. On considère pour cela l'action naturelle de G sur $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5) = \mathbb{F}_5 \cup \{\infty\}$, et pour tout quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) d'éléments distincts de X on pose

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)}.$$

Soit Y l'ensemble des partitions $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ en trois sous-ensembles à deux éléments, telles que pour tous $i \neq j$, si $X_i = \{x_1, x_2\}$ et $X_j = \{x_3, x_4\}$ alors $[x_1, x_2, x_3, x_4] = -1$.

1. Calculer le cardinal de Y.
2. Démontrer que l'action naturelle de G sur les tripartitions de X préserve Y, puis en conclure que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant le fait suivant, que l'on démontrera au préalable : pour $n \geq 1$, tout sous groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 17

On note $G := \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ et $H := \mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2)$.

1. Montrer que G et H ont même cardinal.
2. Montrer que H contient deux classes de conjugaison distinctes formées d'éléments d'ordre 2.
3. Montrer que tout élément d'ordre 2 dans G est la classe d'une transvection de $\mathbb{F}_4^3$.
4. Montrer que G et H ne sont pas isomorphes.

Exercice 18

Soit $n \geq 1$. On note $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$ le sous-groupe des automorphismes *intérieurs* de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$, c'est-à-dire ceux de la forme $\sigma \mapsto g\sigma g^{-1}$ pour un certain $g \in \mathfrak{S}_n$.

1. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ tel que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est intérieur.
2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer le cardinal du commutant $Z(\sigma) := \{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\ \}$ de σ.
3. En déduire que si $n \neq 6$, on a $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$.
4. Soit $n \geq 5$ tel que $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que tous les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués.
5. En déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \neq \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_6)$.