Géométrie Différentielle, TD 3 du 7 mars 2014

1. Exemples de quotients

On considère les actions suivantes du groupe $\mathbb{Z}$ sur une variété X de dimension N, engendrées par l'automorphisme f de X. Déterminer dans quels cas l'action est libre et proprement discontinue. Identifier le quotient quand c'est le cas.

Dans le cas contraire, le quotient est-il séparé ? Localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$?

1– $X = \mathbb{R}^{+*}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

2– $X = \mathbb{R}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

3– $X = \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

4– $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(x,y) = (2x, y/2)$.

2. Encore un quotient

On fait agir le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ par rotation d'angle $2k\pi/n$.

1– Étudier cette action.

2– Munir le quotient $\mathbb{R}^2/\Gamma$ d'une structure de variété, qui le rend difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

3– Que dire de la projection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$?

3. Application de Gauss

Soit M une hypersurface (c'est-à-dire une sous-variété de codimension 1) compacte C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit une application ψ de M dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en associant à x la droite vectorielle orthogonale à T_xM pour le produit scalaire canonique.

Montrer que ψ est C^∞, puis qu'elle est surjective.

4. Éclatement

Soit $n \geqslant 1$. On identifie $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ à l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$.

On note $E_n = \{(x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \mid x \in X\}$.

1– Montrer que E_n est une sous-variété de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

2– Soit π la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E_n \setminus \pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

3– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une immersion C^1. Supposons que la restriction de γ à l'ensemble $I \setminus \gamma^{-1}(0)$ soit injective et que, pour $s \neq t$ dans I avec $\gamma(s) = \gamma(t) = 0$, on ait $\mathbb{R}\gamma'(s) \neq \mathbb{R}\gamma'(t)$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\widetilde{\gamma} : I \to E_n$ telle que $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et que $\widetilde{\gamma}$ soit injective.

5. Une surjection de l'espace projectif sur la sphère de même dimension

1– On considère l'application P de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :
$$(t, x_1, \ldots, x_n) \to \left(\frac{2tx_1}{t^2 + ||x||^2}, \ldots, \frac{2tx_n}{t^2 + ||x||^2}, \frac{-t^2 + ||x||^2}{t^2 + ||x||^2} \right).$$
Montrer que cette application définit par passage au quotient une application p de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^n$ et que p est C^∞. Quelle est l'image réciproque du pôle nord $N = (0, \ldots, 0, 1)$? Du pôle sud $S = (0, \ldots, 0, -1)$?

2– En utilisant la projection stéréographique de pôle N, montrer que p induit un difféomorphisme de $\mathbb{P}^n\mathbb{R} - p^{-1}(N)$ sur $\mathbb{S}^n - N$.

3– Que peut-on dire de p pour $n = 1$?

4– Montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ dont une coordonnée homogène est non nulle est connexe. En admettant le fait que le complémentaire dans $\mathbb{S}^2$ d'une courbe fermée simple a deux composantes connexes, en déduire que $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

6. Grassmanniennes

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et $0 \leqslant k \leqslant n$ un entier. On note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V. L'objet de cet exercice est de munir cet ensemble d'une structure de variété C^∞ compacte.

Si B est un sous-espace vectoriel de dimension $n - k$ de V, on note U_B le sous-ensemble de $\mathcal{G}_k(V)$ constitué des supplémentaires de B. Soit A un supplémentaire de B. On note $\mathcal{L}(A, B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B. On définit
$$\begin{aligned} \psi_{A,B} : \mathcal{L}(A, B) &\to U_B \\ f \quad &\mapsto (\mathrm{Id} + f)(A) \end{aligned}$$

1– Montrer que $\psi_{A,B}$ est bien définie et bijective.

2– Montrer que le domaine de définition et l'image de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(A, B)$ et de $\mathcal{L}(A', B')$. Montrer que $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est un C^∞-difféomorphisme de son domaine de définition sur son image.

3– Montrer qu'il existe une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ telle que les U_B soient des ouverts et les $\psi_{A,B}$ des homéomorphismes. Vérifier que $\mathcal{G}_k(V)$ est séparé pour cette topologie.

4– Montrer que les $\psi_{A,B}$ forment un atlas munissant $\mathcal{G}_k(V)$ d'une structure de variété C^∞.

5– Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est compacte.