Géométrie Différentielle, TD 3 du 7 mars 2014

1. Exemples de quotients

On considère les actions suivantes du groupe $\mathbb{Z}$ sur une variété X de dimension N, engendrées par l'automorphisme f de X. Déterminer dans quels cas l'action est libre et proprement discontinue. Identifier le quotient quand c'est le cas.

Dans le cas contraire, le quotient est-il séparé ? Localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$?

1– $X = \mathbb{R}^{+*}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

2– $X = \mathbb{R}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

3– $X = \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

4– $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(x,y) = (2x, y/2)$.

Solution :

1– L'application logarithme $X = \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ montre que cet exemple est isomorphe à l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation de $\ln(2)$. L'action est donc libre et proprement discontinue, et le quotient est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$.

2– L'action n'est pas libre : 0 est un point fixe. Notons π l'application quotient. Comme $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}x = 0$, on voit que $\pi(0)$ est dans l'adhérence de $\{\pi(x)\}$. Cette bizarrerie montre que le quotient n'est pas séparé et ne peut être localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

3– L'application $\psi : \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^{N-1}$ telle que $\psi(x) = (||x||, \frac{x}{||x||})$ est un difféomorphisme, car c'est une bijection C^∞ de réciproque C^∞ : $(x,y) \mapsto xy$. En transportant l'action de $\mathbb{Z}$ par ce difféomorphisme, on se ramène au cas où $X = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^{N-1}$ et f est une homothétie de rapport 2 sur la première coordonnée. En utilisant la première question, on voit que l'action est libre et proprement discontinue et que le quotient est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{N-1}$.

4– On vérifie aisément que l'action est libre. En revanche, si K est le segment joignant $(0,1)$ à $(1,0)$, $f^{(n)}(K)$ est le segment joignant $(0, \frac{1}{2^n})$ à $(2^n, 0)$. Un dessin (ou un calcul facile) montre que ces deux segments s'intersectent toujours : le compact K est d'intersection non vide avec tous ses conjugués. Par conséquent l'action n'est pas proprement discontinue.

On note toujours π l'application quotient. Le quotient n'est pas séparé : comme les points $(\frac{1}{2^n}, 1)$ et $(1, \frac{1}{2^n})$ sont dans la même orbite, on voit que les points $\pi(0,1)$ et $\pi(1,0)$ ne sont pas séparés dans le quotient.

En revanche le quotient est localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, on vérifie que tout point $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a un voisinage U qui n'intersecte aucun de ses conjugués : on peut prendre par exemple $U = B(x, \max(|x_1|/4, |x_2|/4))$. Ainsi, le voisinage $\pi(U)$ de $\pi(x)$ dans le quotient est isomorphe à U, donc à un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. Encore un quotient

On fait agir le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ par rotation d'angle $2k\pi/n$.

1– Étudier cette action.

2– Munir le quotient $\mathbb{R}^2/\Gamma$ d'une structure de variété, qui le rend difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

3– Que dire de la projection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$?

Solution :

1– L'action n'est pas libre : 0 est point fixe de tout le groupe. Elle est proprement discontinue puisque Γ est fini.

2– On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $x \mapsto x^n$. Cette application passe au quotient au départ, et donne ainsi une application continue (pour la topologique quotient) $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^2/\Gamma \to \mathbb{R}^2$. Il est clair que $\widetilde{\varphi}$ est une bijection ; on montre aisément que c'est un homéomorphisme en remarquant que φ (et donc $\widetilde{\varphi}$) est une application ouverte. On munit alors $\mathbb{R}^2/\Gamma$ d'une structure de variété dont l'unique carte est $\widetilde{\varphi}$.

3– Par définition de la structure de variété, une application $f : M \to \mathbb{R}^2/\Gamma$ est lisse si, et seulement si $\widetilde{\varphi} \circ f : M \to \mathbb{R}^2$ est lisse. En particulier, p est lisse car, par définition, $\widetilde{\varphi} \circ p = \varphi$ qui est lisse. De même, p n'est pas une submersion car φ n'est pas une submersion.

Bilan : on a muni le quotient d'une structure de variété qui n'est pas vraiment une structure de variété quotient ; en effet, dans le cas usuel où l'on quotiente par un groupe discret, la projection est un revêtement, donc en particulier un difféomorphisme local. En revanche, la topologie de la variété quotient coïncide avec la topologie quotient.

3. Application de Gauss

Soit M une hypersurface (c'est-à-dire une sous-variété de codimension 1) compacte C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit une application ψ de M dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en associant à x la droite vectorielle orthogonale à T_xM pour le produit scalaire canonique.

Montrer que ψ est C^∞, puis qu'elle est surjective.

Solution :

1– Soit $x_0 \in M$. La sous-variété M de $\mathbb{R}^{n+1}$ est définie sur un voisinage U de x_0 par l'équation $f = 0$ où $f : U \to \mathbb{R}$ est une submersion C^∞. L'application $\beta : x \mapsto df_x$ est également C^∞, à valeurs dans $(\mathbb{R}^{n+1})^*$. Notons $\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \to (\mathbb{R}^{n+1})^*$ l'identification obtenue à l'aide du produit scalaire et $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la projection. Alors $\psi|_{U\cap M} = (\pi \circ \alpha^{-1} \circ \beta)|_{U\cap M}$, ce qui montre ψ est C^∞ en x_0.

2– Soit $v \in \mathbb{S}^n$. La fonction $x \mapsto \langle x, v\rangle$ est continue sur M, elle y atteint donc son maximum en un point x_0. On va montrer que v est orthogonal à $T_{x_0}M$, ce qui conclura. Soit $u \in T_{x_0}M$. Il existe une courbe lisse $\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans M avec $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = u$. Soit alors $f : t \mapsto \langle\gamma(t), v\rangle$. Cette fonction a un maximum local en 0, par définition de x_0. En particulier, $f'(0) = 0$. Mais $f'(0) = \langle u, v\rangle$, donc v est bien orthogonal à tout vecteur de $T_{x_0}M$.

4. Éclatement

Soit $n \geqslant 1$. On identifie $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ à l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$.

On note $E_n = \{(x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \mid x \in X\}$.

1– Montrer que E_n est une sous-variété de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

2– Soit π la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E_n \setminus \pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

3– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une immersion C^1. Supposons que la restriction de γ à l'ensemble $I \setminus \gamma^{-1}(0)$ soit injective et que, pour $s \neq t$ dans I avec $\gamma(s) = \gamma(t) = 0$, on ait $\mathbb{R}\gamma'(s) \neq \mathbb{R}\gamma'(t)$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\widetilde{\gamma} : I \to E_n$ telle que $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et que $\widetilde{\gamma}$ soit injective.

Solution :

1– Soit A un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas l'origine. L'espace affine A s'identifie à l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$ intersectant A, et fournit une carte locale de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. De telles cartes locales de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ recouvrent $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Par conséquent, il suffit de considérer la carte $\mathbb{R}^n \times A$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ et de montrer que $E_n \cap (\mathbb{R}^n \times A) = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}y\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times A$.

Pour cela, on introduit le paramétrage $f : \mathbb{R} \times A \to \mathbb{R}^n \times A$ défini par $f(\lambda, y) = (\lambda y, y)$. Son image est bien $E_n \cap (\mathbb{R}^n \times A)$. L'application f est un homéomorphisme sur son image car on dispose d'une réciproque continue $(x, y) \mapsto (\frac{||x||}{||y||}, y)$. Elle est de plus immersive par calcul de sa différentielle. On a bien montré que E_n est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

2– L'application de $E_n \setminus \pi^{-1}(0)$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ donnée par $(x, X) \mapsto x$ est un difféomorphisme, d'inverse $x \mapsto (x, [x])$.

La première projection est un difféomorphisme entre $\pi^{-1}(0)$ et $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, d'inverse $X \mapsto (0, X)$.

3– Comme la projection π est un homéomorphisme entre $E_n \backslash \pi^{-1}(0)$ et $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, il y a une unique manière de relever $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ en $\widetilde{\gamma}(t) \in E_n$ tel que $\pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Comme la dérivée de γ ne s'annule pas, l'ensemble $\gamma^{-1}(0)$ est discret, et donc d'intérieur vide. Il existe donc au plus une manière de prolonger $\widetilde{\gamma}$ en une application continue.

Pour $t \in \gamma^{-1}(0)$, posons $\widetilde{\gamma}(t) = (0, [\gamma'(t)])$. Ainsi, on a bien $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. L'hypothèse $\mathbb{R}\gamma'(s) \neq \mathbb{R}\gamma'(t)$ si $s \neq t$ et $s, t \in \gamma^{-1}(0)$ assure que la courbe $\widetilde{\gamma}$ est simple.

Il reste à vérifier qu'elle est continue. C'est trivial hors de $\gamma^{-1}(0)$. Soit donc t_0 tel que $\gamma(t_0) = 0$. Soient $pr_1 : E_n \to \mathbb{R}^n$ et $pr_2 : E_n \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ les projections. Comme $pr_1 \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ est continue en t_0, il suffit de vérifier que $pr_2 \circ \widetilde{\gamma}$ est continue en t_0 pour conclure.

Pour t proche de t_0, on écrit $[\gamma(t)] = [\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}]$. Comme γ' est continue en t_0, cela conclut.

5. Une surjection de l'espace projectif sur la sphère de même dimension

1– On considère l'application P de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$(t, x_1, \ldots, x_n) \to \left(\frac{2tx_1}{t^2 + ||x||^2}, \ldots, \frac{2tx_n}{t^2 + ||x||^2}, \frac{-t^2 + ||x||^2}{t^2 + ||x||^2} \right).$$

Montrer que cette application définit par passage au quotient une application p de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^n$ et que p est C^∞. Quelle est l'image réciproque du pôle nord $N = (0, \ldots, 0, 1)$? Du pôle sud $S = (0, \ldots, 0, -1)$?

2– En utilisant la projection stéréographique de pôle N, montrer que p induit un difféomorphisme de $\mathbb{P}^n\mathbb{R} - p^{-1}(N)$ sur $\mathbb{S}^n - N$.

3– Que peut-on dire de p pour $n = 1$?

4– Montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ dont une coordonnée homogène est non nulle est connexe. En admettant le fait que le complémentaire dans $\mathbb{S}^2$ d'une courbe fermée simple a deux composantes connexes, en déduire que $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

Solution :

1– Cette application est bien définie sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ car les dénominateurs ne s'y annulent pas. Un calcul immédiat montre qu'elle prend ses valeurs dans $\mathbb{S}^n$. Comme les équations sont homogènes, elle passe au quotient en une application $p : \mathbb{P}^n\mathbb{R} \to \mathbb{S}^n$.

La formule pour P montre que P est C^∞. Comme, lue dans les cartes habituelles de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, p est la restriction de P à des hyperplans affines ne passant pas par l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$, p est C^∞.

On calcule que $p^{-1}(S)$ est la droite engendrée par $(0, \ldots, 0, 1)$ et que $p^{-1}(N)$ est l'hyperplan d'équation $t = 0$.

2– Notons $q : \mathbb{S}^n - N \to \mathbb{R}^n$ la projection stéréographique. C'est un difféomorphisme. Un calcul direct montre que $q \circ p$ défini sur $\{[x_1 : \ldots : x_N : t] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R} \mid t \neq 0\}$ est l'application $[x_1 : \ldots : x_N : t] \mapsto (x_1/t, \ldots, x_N/t)$. Il s'agit exactement de la carte $t \neq 0$ de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, de sorte que $q \circ p$ est un difféomorphisme. Finalement, p induit un difféomorphisme de $\mathbb{P}^n\mathbb{R} - p^{-1}(N)$ sur $\mathbb{S}^n - N$ comme composée des difféomorphismes $q \circ p$ et q^{-1}.

3– C'est un difféomorphisme. En effet, vu la question précédente, il suffit de le vérifier au voisinage de $[0 : 1]$. En se plaçant dans la carte $x = 1$, on est ramenés à vérifier que $t \mapsto (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$ est une immersion en 0. C'est un calcul immédiat.

4– Soit $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ l'application quotient. Comme $\{x \mid x_1 > 0\}$ est connexe, $\pi(\{x \mid x_1 \neq 0\}) = \pi(\{x \mid x_1 > 0\})$ est connexe.

Quand $n = 2$, $\pi(\{x \mid x_1 = 0\})$ est un hyperplan de $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, difféomorphe à $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ donc à $\mathbb{S}^1$. C'est un courbe fermée simple de $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ de complémentaire connexe. Cela empêche $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ d'être homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

6. Grassmanniennes

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et $0 \leqslant k \leqslant n$ un entier. On note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V. L'objet de cet exercice est de munir cet ensemble d'une structure de variété C^∞ compacte.

Si B est un sous-espace vectoriel de dimension $n - k$ de V, on note U_B le sous-ensemble de $\mathcal{G}_k(V)$ constitué des supplémentaires de B. Soit A un supplémentaire de B. On note $\mathcal{L}(A, B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B. On définit

$$\begin{aligned} \psi_{A,B} : \mathcal{L}(A, B) &\to U_B \\ f &\mapsto (\mathrm{Id} + f)(A) \end{aligned}$$

1– Montrer que $\psi_{A,B}$ est bien définie et bijective.

2– Montrer que le domaine de définition et l'image de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(A, B)$ et de $\mathcal{L}(A', B')$. Montrer que $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est un C^∞-difféomorphisme de son domaine de définition sur son image.

3– Montrer qu'il existe une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ telle que les U_B soient des ouverts et les $\psi_{A,B}$ des homéomorphismes. Vérifier que $\mathcal{G}_k(V)$ est séparé pour cette topologie.

4– Montrer que les $\psi_{A,B}$ forment un atlas munissant $\mathcal{G}_k(V)$ d'une structure de variété C^∞.

5– Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est compacte.

Solution :

1– L'application $\psi_{A,B}$ associe à $f : A \to B$ son graphe dans $V = A \oplus B$. La projection π_A sur A parallèlement à B réalise un isomorphisme entre le graphe et A : celui-ci est bien de dimension k. D'autre part, son intersection avec B est $\{0\}$, de sorte que $(\mathrm{Id}+f)(A) \in U_B$ et que $\psi_{A,B}$ est bien définie.

Comme une fonction est déterminée par son graphe, $\psi_{A,B}$ est injective.

Enfin, soit $C \in U_B$. Comme $C \cap B = \{0\}$, la projection $\pi_A|_C : C \to A$ sur A parallèlement à B est injective, donc un isomorphisme par dimension. Notant π_B la projection sur B parallèlement à A, on vérifie aisément que C est le graphe de $\pi_B \circ (\pi_A|_C)^{-1} : A \to B$. Ceci montre la surjectivité de $\psi_{A,B}$.

2– Le domaine de définition W de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est l'ensemble des $f : A \to B$ dont le graphe est un supplémentaire de B'. Si (a_i) et (b'_j) sont des bases de A et B', cette condition s'écrit $\det((a_i, f(a_i)), b'_j)_{i,j} \neq 0$, ce qui montre que W est ouvert. On montre de même que l'image de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A', B')$.

Il suffit pour conclure de montrer que $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est C^∞ sur ce domaine de définition W : en effet, le même raisonnement montrera que sa réciproque est C^∞, donc que c'est un C^∞-difféomorphisme.

Pour cela, fixons $x \in A'$ et montrons que $y = \psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}(f)(x)$ dépend de manière C^∞ de $f \in W$. Or y est l'unique solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\pi_{A'}(y) = 0$$
$$\pi_B(x+y) = f(\pi_A(x+y))$$

Les formules de Cramer montrent alors que y dépend de manière C^∞ des coefficients de ce système, donc de f.

3– On prend pour ouverts les $U \subset \mathcal{G}_k(V)$ tels que pour tout $A \in \mathcal{G}_k(V)$ et pour tout supplémentaire B de A, $\psi^{-1}_{A,B}(U \cap U_B)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Cela définit bien une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$.

Comme les $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ sont des homéomorphismes, on vérifie que les ouverts inclus dans U_B sont exactement les sous-ensembles de la forme $\psi_{A,B}(V)$ pour V ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Ainsi, U_B est ouvert et $\psi_{A,B}$ est un homéomorphisme.

Soit $A, A' \in \mathcal{G}_k(V)$. On peut trouver un supplémentaire commun B à A et A' de sorte que $A, A' \in U_B$. Comme U_B est séparé, on peut trouver deux ouverts de U_B séparant A et A'. $\mathcal{G}_k(V)$ est donc bien séparé.

4– C'est une conséquence immédiate des deux questions précédentes.

5– On introduit E l'ouvert de V^k constitué des familles libres et $g : E \to \mathcal{G}_k(V)$ l'application qui associe à une famille libre l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrons que g est continue. Vu la définition de la topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$, il suffit de montrer que $V_B = g^{-1}(U_B)$ est ouvert et que $g|_{V_B} : V_B \to U_B$ est continue.

Pour le premier point, choisissons une base (b_j) de B. Alors $(v_i) \in E$ appartient à V_B si et seulement si $\det(v_i, b_j)_{i,j} \neq 0$, ce qui est bien une condition ouverte.

Pour le second point, il suffit de montrer que $\psi_{A,B}^{-1} \circ g|_{V_B}$ est continue. Fixons $x \in A$ et soit $(v_i) \in V_B$. Alors $\psi_{A,B}^{-1} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ est l'unique solution en y du système d'équations linéaires à $n+k$ équations et $n+k$ inconnues y et λ_i suivant :

$$\begin{aligned} \pi_A(y) &= 0 \\ x + y &= \sum_i \lambda_i v_i \end{aligned}$$

Les formules de Cramer montrent alors que $\psi_{A,B}^{-1} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ dépend de manière continue des coefficients de ce système, donc des v_i. Cela montre la continuité de g.

On peut alors conclure. Fixons un produit scalaire sur V. Si K est l'ensemble des familles orthonormales, K est compact car fermé borné dans V^k et $\mathcal{G}_k(V) = g(K)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.