Géométrie Différentielle, TD 3 du 2 mars 2015

1. Dilatation d'un champ de vecteurs

On considère X un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^n$.

1– Montrer qu'il existe une fonction lisse f strictement positive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que fX est un champ de vecteurs complet.

2– Comparer les trajectoires de X et fX.

2. Connexité

Soit Y une sous-variété connexe de dimension n de $\mathbb{R}^N$ et X une sous-variété de Y de dimension $\leqslant n-2$. Montrer que $Y - X$ est connexe.

3. Transitivité des difféomorphismes

1– Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $||x||, ||y|| < r$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z) = z$ si $||z|| > r$. On pourra utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.

2– Soit M une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^N$ et $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que, si $y \in V$, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x) = y$.

3– Soit M une sous-variété connexe de $\mathbb{R}^N$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.

4– Soit M une sous-variété connexe de $\mathbb{R}^N$ de dimension $\geqslant 2$, et soit $k \geqslant 1$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit k-transitivement sur M : si $x_1, \dots, x_k \in M$ sont distincts et si $y_1, \dots, y_k \in M$ sont distincts, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

4. Flot d'un champ de vecteurs incompressible

Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Il est dit *incompressible* si sa divergence est nulle, c'est-à-dire si $\sum_i \partial_i X^i = 0$, avec X^i la i-ème coordonnée de X. Montrer qu'alors, la différentielle (spatiale) du flot de X a pour déterminant 1.