Géométrie Différentielle, TD 3 du 2 mars 2015

1. Dilatation d'un champ de vecteurs

On considère X un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^n$.

1– Montrer qu'il existe une fonction lisse f strictement positive de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que fX est un champ de vecteurs complet.

2– Comparer les trajectoires de X et fX.

Solution :

Le lemme fondamental est le suivant : soient $K \subset L$ deux compacts de $\mathbb{R}^n$ tels que K est contenu dans l'intérieur de L. Soit ε tel que pour tout x dans K, le flot de X partant de x est défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et est à valeurs dans L. Soit f une fonction positive sur $\mathbb{R}^n$; notons C son maximum sur L. Alors le flot de fX partant de $x \in K$ est défini sur $]-\varepsilon/C, \varepsilon/C[$ et est à valeurs dans L.

Démonstration. Notons $\varphi(t,x)$ le flot de X défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\times K$. On cherche le flot de fX sous la forme $\psi(t,x) = \varphi(s(t,x),x)$ où s est définie sur un voisinage de $\{0\} \times K$, est à valeurs dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et vérifie $s(0,x) = 0$, pour tout x dans K. On doit avoir

$$\partial_t \psi(t,x) = f(\psi(t,x))X(\psi(t,x)),$$

soit

$$\partial_t s(t,x) X(\psi(t,x)) = f(\psi(t,x))X(\psi(t,x)),$$

ce qui sera satisfait dès que

$$\partial_t s(t,x) = f(\varphi(s(t,x),x)).$$

C'est une équation différentielle en la fonction s. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une constante $\alpha > 0$ tel que $s(t,x)$ est défini sur $]-\alpha, \alpha[\times K$ et est à valeurs dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Si $\alpha < \varepsilon/C$, alors comme $\varphi(s(t,x),x) \in L$, on a $|\partial_t s(t,x)| \leqslant C$, d'où $|s(t,x)| \leqslant Ct$, pour $|t| \leqslant \alpha$. Cette inégalité prouve qu'on peut augmenter la valeur de α, de telle sorte que $s(t,x)$ est encore à valeurs dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Donc, on peut supposer $\alpha = \varepsilon/C$.

Finalement, on a montré que le flot de fX est donné par $\psi(t,x) = \varphi(s(t,x),x)$, où $s(t,x)$ est définie sur $]-\varepsilon/C, \varepsilon/C[\times K$.

□

Considérons alors une suite exhaustive de compacts $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$. On a donc $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ et $\mathbb{R}^n = \bigcup_i K_i$. Notons $L_i = K_i - \overset{\circ}{K}_{i-1}$ et $M_i = K_{i+1} - \overset{\circ}{K}_{i-2}$ de sorte que M_i est un voisinage compact de L_i. Soit ε_i une constante positive telle que le flot de X démarrant en tout point $x \in L_i$ reste dans M_i pendant un temps ε_i. Soit alors f une fonction strictement positive telle que $|f| \leqslant \varepsilon_i$ sur M_i (une telle fonction existe). D'après ce qui précède, le flot de fX démarrant en un point de L_i reste dans M_i pendant un temps au moins 1. En particulier, le flot reste dans un compact en temps fini, donc est défini sur tout $\mathbb{R}$.

On a vu au cours de la preuve que les trajectoires de fX et de X étaient les mêmes, après reparamétrage. Soyons plus précis :

Définition 1. *Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Soit x un point de $\mathbb{R}^n$, notons I l'ouvert maximal de définition du flot de X, partant de x. Notant $\varphi(t, x)$ ce flot, défini pour $t \in I$, on appelle* trajectoire *de x pour le champ X l'image $\varphi(I, x)$.*

Les trajectoires d'un champ de vecteurs X forment une partition de $\mathbb{R}^n$, par les propriétés du flot d'un champ de vecteurs. Montrons que, si f est une fonction strictement positive, alors les trajectoires du champ X et du champ fX sont les mêmes.

On a vu précédemment que si $\psi(t, x)$ est le flot de fX et $\varphi(t, x)$ celui de X, alors $\psi(t, x) = \varphi(s(t, x), x)$, pour une certaine fonction s et pour un temps t assez petit. Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, il existe un ouvert U_x de la trajectoire de x pour le champ fX tel que U_x contient x et est contenu dans la trajectoire de x pour le champ X. Ceci implique que toute la trajectoire de x pour le champ fX est contenue dans la trajectoire de x pour le champ X.

En effet, soit y dans la trajectoire de x pour le champ fX, écrivons $y = \psi(t_0, x)$. Pour tout t dans $[0, t_0]$, considérons U_t un ouvert de la trajectoire de $z_t := \psi(t, x)$ pour le champ fX (égale par définition à la trajectoire de x pour le champ fX) tel que U_t contient z_t et U_t est contenu dans la trajectoire de z_t pour le champ X. Par compacité de $[0, t_0]$, il existe des temps $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = t_0$ tels que les U_{t_i} recouvrent $\psi([0, t_0], x)$. On peut de plus supposer les intersections $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}}$ non vides. Alors, par construction, $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}}$ est contenu à la fois dans la trajectoire de z_{t_i} pour le champ X et dans la trajectoire de $z_{t_{i+1}}$ pour le champ X. Par une récurrence immédiate, toutes ces trajectoires doivent être les mêmes, nécessairement égales à la trajectoire de x pour le champ X. Finalement, y est bien dans la trajectoire de x pour le champ X.

On a montré l'inclusion des trajectoires du champ fX dans les trajectoires du champ X. En raisonnant avec $1/f$, on montre l'inclusion réciproque.

2. Connexité

Soit Y une sous-variété connexe de dimension n de $\mathbb{R}^N$ et X une sous-variété de Y de dimension $\leqslant n - 2$. Montrer que $Y - X$ est connexe.

Solution :

Supposons que $Y - X$ soit la réunion de deux ouverts non vides disjoints U et V. Soit x dans X. Alors, il existe un voisinage ouvert W_x de x dans Y tel que $W_x \cap (Y - X)$ est connexe. En effet, c'est un problème local et on peut donc supposer que $Y = \mathbb{R}^n$, que $X = \mathbb{R}^k$ avec $k \leqslant n - 2$ et que $x = 0$. Alors, soit $W_x \cap (Y - X)$ est contenu dans U, soit il est contenu dans V.

Notons $U' = U \cup \{x \in X \mid W_x \cap (Y - X) \subset U\}$ et $V' = V \cup \{x \in X \mid W_x \cap (Y - X) \subset V\}$. Ceci définit une partition de Y. Montrons que U' et V' sont fermés, ce qui contredira l'hypothèse de connexité de Y. Soit u_n une suite de U' tendant vers un point y de Y. On peut supposer les u_n dans U car U est dense dans U'. Maintenant, soit $y \in Y - X$ et alors $y \in U$, car U est fermé dans $Y - X$. Soit, $y \in X$; dans ce cas $W_y \cap (Y - X)$ contient des points de U (les u_n pour n grand) donc est inclus dans U, ce qui signifie que $y \in U'$.

Dans tous les cas, la limite y des $u_n \in U'$ est encore dans U'. Donc, U' (et V') sont fermés ; c'est une contradiction qui conclut l'exercice.

3. Transitivité des difféomorphismes

1– Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $||x||, ||y|| < r$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z) = z$ si $||z|| > r$. On pourra utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.

2– Soit M une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^N$ et $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que, si $y \in V$, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x) = y$.

3– Soit M une sous-variété connexe de $\mathbb{R}^N$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.

4– Soit M une sous-variété connexe de $\mathbb{R}^N$ de dimension $\geqslant 2$, et soit $k \geqslant 1$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit k-transitivement sur M : si $x_1, \ldots, x_k \in M$ sont distincts et si $y_1, \ldots, y_k \in M$ sont distincts, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

Solution :

1– Considérons le champ de vecteurs X constant égal à $y - x$. Soit ρ tel que $||x||, ||y|| < \rho < r$ et notons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction plateau égale à 1 sur $B(0, \rho)$ et égale à 0 hors de $B(0, r)$. Posons $Y = fX$. Le flot de Y est défini pour tout temps, par le théorème des bouts. En effet, hors de $B(0, r)$, il est constant, de sorte qu'il ne peut sortir de tout compact.

Notons φ le flot de Y au temps 1. Il vérifie les propriétés voulues.

2– On choisit un voisinage U de x difféomorphe à $\mathbb{R}^n$; on l'identifie à $\mathbb{R}^n$ de sorte que x en soit l'origine. On pose V la boule unité ouverte dans U. Montrons que V convient.

Soit $y \in V$. Par la question précédente, on trouve un difféomorphisme φ de U envoyant x sur y, et qui peut se prolonger en un difféomorphisme de M en posant $\varphi(z) = z$ pour $z \notin U$.

3– La question précédente montre que les orbites de l'action du groupe des difféomorphismes sont ouvertes. Comme M est connexe, et partitionnée en orbites, il ne peut y avoir qu'une orbite, égale à M tout entier.

4– On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$, c'est le résultat ci-dessus. Si c'est vrai pour $k-1$, on considère un difféomorphisme ψ envoyant x_i sur y_i pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Posons $x = \psi(x_k)$. On va construire un difféomorphisme ψ' tel que $\psi'(y_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$ et $\psi'(x) = y_k$. On pourra alors poser $\varphi = \psi' \circ \psi$.

On considère pour cela l'action sur M du groupe des difféomorphismes fixant $y_1, \ldots, y_{k-1}$. En raisonnant comme dans les questions précédentes (et en particulier en exploitant la connexité de $M \setminus \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$, vraie car $\dim(M) \geqslant 2$), on montre qu'il agit transitivement sur $M \setminus \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$, ce qui conclut.

4. Flot d'un champ de vecteurs incompressible

Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Il est dit *incompressible* si sa divergence est nulle, c'est-à-dire si $\sum_i \partial_i X^i = 0$, avec X^i la i-ème coordonnée de X. Montrer qu'alors, la différentielle (spatiale) du flot de X a pour déterminant 1.

Solution :

Soit V un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sur lequel le flot est défini. Par définition, en tout point de V,

$$\partial_t \varphi(t,x) = X(\varphi(t,x)).$$

Dans ce qui suit, d^s désigne la différentielle spatiale d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. En différentiant spatialement l'égalité précédente, il vient :

$$\partial_t d^s_x \varphi(t,\cdot) = d_{\varphi(t,x)} X \circ d^s_x \varphi(t,\cdot),$$

où X est vu comme une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Notons $D(t,x) = \det d_x \varphi(t,\cdot)$. On rappelle que la différentielle du déterminant est donné par la formule :

$$d_M \det(H) = \mathrm{Tr}(\widetilde{M} H),$$

où $\widetilde{M}$ est la comatrice de M, égale à $\det(M).M^{-1}$ si M est inversible. En particulier, si $A : \mathbb{R} \to M(n, \mathbb{R})$ est un chemin de matrices et si $f(t) = \det(A(t))$, on a la formule :

$$\partial_t f(t) = \mathrm{Tr}(\widetilde{A}(t) \partial_t A(t)).$$

On peut maintenant calculer $\partial_t D(t,x)$:

$$\partial_t D(t,x) = \mathrm{Tr}((d^s_x)^{-1} \varphi(t,\cdot) \times d_{\varphi(t,x)} X \circ d^s_x \varphi(t,\cdot)) \times \det d^s_x \varphi(t,\cdot).$$

En faisant commuter les matrices à l'intérieur de la trace, il vient :

$$\partial_t D(t,x) = \mathrm{Tr}(d_{\varphi(t,x)} X) \times \det d^s_x \varphi(t,\cdot).$$

Mais l'hypothèse d'incompressibilité se traduit par $\mathrm{Tr}(dX) = 0$, donc $D(t,x)$ est constant en t. Comme par définition, $D(0,x)$ est le déterminant de l'identité, cela conclut l'exercice.