# Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$3

## Corrigé

**Exercice 1**

1.

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(a)(\partial_j u) - \partial_j(\mathrm{Op}(a)(u)) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}a(x,\xi)(i\xi_j)\hat{u}(\xi)d\xi - \frac{1}{(2\pi)^n}\int \frac{\partial}{\partial x_j}(e^{ix\xi}a(x,\xi))\hat{u}(\xi)d\xi \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\frac{\partial}{\partial x_j}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\end{aligned}$$

ce qui est bien un opérateur pseudo-différentiel, de symbole $-\frac{\partial}{\partial x_j}a$.

2. On utilise la relation $\widehat{x_j u} = i\partial_j \hat{u}$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(a)(x_j u) - x_j\mathrm{Op}(a)(u) &= \frac{i}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}a(x,\xi)\partial_j\hat{u}(\xi)d\xi - \frac{1}{(2\pi)^n}\int x_j e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^n}\int \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(e^{ix\xi}a(x,\xi)\right)\hat{u}(\xi)d\xi - \frac{1}{(2\pi)^n}\int x_j e^{ix\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}\frac{\partial}{\partial \xi_j}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi\end{aligned}$$

ce qui est bien un opérateur pseudo-différentiel, de symbole $-i\frac{\partial}{\partial \xi_j}a$.

**Exercice 2**

1. a) Soit $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Soit $K = \mathrm{Supp}(u)$ ; par hypothèse, $K$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

**Lemme 2.1.** *Soit $L \subset \mathbb{R}^n$ un compact tel que $K \subset \mathring{L}$.*
*Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\phi_{|L} = 0$. Alors $\langle u, \phi\rangle = 0$.*

*Démonstration.* Soit $\Gamma$ le support de $\phi$ ; c'est un compact, inclus dans $\mathbb{R}^n - \mathring{L}$, donc d'intersection vide avec $K$. Par définition du support de $u$, chaque point de $\Gamma$ admet donc un voisinage sur lequel $u$ est nulle.
Il existe donc $V_1, ..., V_s$ un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\Gamma \subset \bigcup_{j\leq s} V_j$$
$$\forall j \leq s \qquad u_{|V_j} = 0$$

La fonction $\phi$ peut s'écrire sous la forme :

$$\phi = \phi_1 + ... + \phi_s$$

où, pour tout $j \leq s$, $\phi_j$ est à support inclus dans $V_j$. (Cela se voit en utilisant les partitions de l'unité.)
Alors $\langle u, \phi \rangle = \sum_{j \leq s} \langle u, \phi_j \rangle = \sum_{j \leq s} \langle u_{|V_j}, \phi_j \rangle = 0$. □

Soit $L \subset \mathbb{R}^n$ un compact tel que $K \subset \mathring{L}$. On déduit du lemme que, pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\langle u, \phi \rangle$ ne dépend que des valeurs de $\phi$ sur $L$ : en effet, si $\phi_1 = \phi_2$ sur $L$, $\phi_1 - \phi_2$ est nulle sur $L$ et, d'après le lemme, $\langle u, \phi_1 - \phi_2 \rangle = 0$.
Soit $L_2$ un autre compact, tel que $L \subset \mathring{L}_2$. Puisque $u$ est une distribution, il existe $k \in \mathbb{N}, C > 0$ tels que :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ tq } \mathrm{Supp}(\phi) \subset L_2 \qquad |\langle u, \phi \rangle| \leq C \sup_{x \in L_2, |\alpha| \leq k} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, si on note $\chi$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui vaut 1 sur $L$ et 0 sur $\mathbb{R}^n - L_2$, on a :

$$\langle u, \phi \rangle = \langle u, \chi\phi \rangle$$

puisque $\phi$ et $\chi\phi$ coïncident sur $L$. De plus, $\mathrm{Supp}(\chi\phi) \subset L_2$ donc :

$$|\langle u, \chi\phi \rangle| \leq C \sup_{x \in L_2, |\alpha| \leq k} |\partial^\alpha (\chi\phi)(x)|$$

Quitte à remplacer la constante $C$ par une autre constante, $D$, on a alors :

$$|\langle u, \phi \rangle| = |\langle u, \chi\phi \rangle| \leq C \sup_{x \in L_2, |\alpha| \leq k} |\partial^\alpha (\chi\phi)(x)| \leq D \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq k} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

ce qui garantit que $u$ se prolonge en une distribution tempérée.
b) Soit $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ fixée. Notons $K = \mathrm{Supp}(u)$. Comme on l'a vu en a), pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\langle u, \phi \rangle$ ne dépend que des valeurs de $\phi$ sur un voisinage de $K$.
Puisque $\phi$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, $\hat{\phi}$ est dans la classe de Schwartz, ce qui permet de montrer que :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi) e^{i\xi.x} d\xi \\ &= \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{(k_1,...,k_n) \in \{-N^2,...,N^2\}^n} \hat{\phi}\left(\frac{k_1}{N}, ..., \frac{k_n}{N}\right) e^{i\left(\frac{k_1}{N}x_1 + ... + \frac{k_n}{N}x_n\right)}\end{aligned}$$

où la convergence est uniforme sur tout compact. On vérifie qu'on a également convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées.
Soit $\chi$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, qui vaut 1 sur un voisinage de $K$.
Pour tout $(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, posons :

$$g(\xi) = \langle u, x \to \chi(x) e^{ix.\xi} \rangle$$

Puisque $u$ est une distribution tempérée, $|g(\xi)|$ est majorée par (une constante fois) la norme infinie des dérivées de $\chi(x)e^{ix.\xi}$ à un ordre fini, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ vérifiant :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \qquad |g(\xi)| \leq C||\xi||^M$$

De plus, $g$ est continue : si $\xi_k \to \xi_\infty$, alors $\chi(x)e^{ix.\xi_k}$ converge vers $\chi(x)e^{ix.\xi_\infty}$ au sens de toutes les semi-normes de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donc $g(\xi_k) \to g(\xi_\infty)$. On montre de manière similaire que $g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $g^{(\alpha)}(\xi) = \langle u, x \to \chi(x)(ix)^\alpha e^{ix.\xi}\rangle$.
On a :

$$\begin{aligned}
\langle u, \phi\rangle &= \langle u, \chi\phi\rangle \\
&= \left\langle u, \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\{-N^2,\dots,N^2\}^n} \hat{\phi}\left(\frac{k_1}{N},\dots,\frac{k_n}{N}\right)\left(\chi e^{i\left(\frac{k_1}{N}x_1+\dots+\frac{k_n}{N}x_n\right)}\right)\right\rangle \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\{-N^2,\dots,N^2\}^n} \hat{\phi}\left(\frac{k_1}{N},\dots,\frac{k_n}{N}\right)\left\langle u, \chi e^{i\left(\frac{k_1}{N}x_1+\dots+\frac{k_n}{N}x_n\right)}\right\rangle \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\{-N^2,\dots,N^2\}^n} \hat{\phi}\left(\frac{k_1}{N},\dots,\frac{k_n}{N}\right) g\left(\frac{k_1}{N},\dots,\frac{k_n}{N}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi)g(\xi)d\xi
\end{aligned}$$

Par définition de la transformée de Fourier d'une distribution, cela entraîne que $\hat{u}$ vaut $\frac{1}{(2\pi)^n}g$, ce qui est bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

**Exercice 3**

1. a) Quitte à appliquer une homothétie, on peut supposer $||\xi|| = 1$.
Soit $c \in ]0;1[$ tel que $B(\xi, 3c) \subset C_1$. Posons $C_2 = \mathbb{R}_+^* B(\xi, c)$. C'est un voisinage conique de $\xi$. Montrons qu'il satisfait la condition requise.
Soit $\eta \in C_2$. Alors $\eta$ est de la forme $\eta = \lambda\xi'$, avec $\lambda > 0$ et $\xi' \in B(\xi, c)$. Pour tout $\zeta$ :

$$\begin{gathered}
||\eta - \zeta|| \leq c||\eta|| \\
\Rightarrow \qquad ||\xi' - \zeta/\lambda|| \leq c||\xi'|| \leq c(||\xi|| + c) \leq 2c \\
\Rightarrow \qquad ||\zeta/\lambda - \xi|| \leq ||\zeta/\lambda - \xi'|| + ||\xi' - \xi|| < 3c \\
\Rightarrow \qquad \zeta/\lambda \in B(\xi, 3c) \subset C_1 \\
\Rightarrow \qquad \zeta/\lambda \in C_1 \\
\Rightarrow \qquad \zeta \in C_1
\end{gathered}$$

b) On utilise l'égalité $\widehat{\phi u} = \frac{1}{(2\pi)^n}\hat{\phi} \star \hat{u}$.

Il faut montrer que $\hat{\phi} \star \hat{u}$ est à décroissance rapide sur $C_2$. Étudions $\hat{\phi} \star \hat{u}(\eta)$ pour $\eta \in C_2$.

$$\begin{aligned}\hat{\phi} \star \hat{u}(\eta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\eta - \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{||\eta-\zeta|| \leq c||\eta||} \hat{\phi}(\eta - \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta + \int_{||\eta-\zeta|| > c||\eta||} \hat{\phi}(\eta - \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta\end{aligned}$$

On va montrer que chacun des deux termes de la somme est à décroissance rapide.
Soit $N \in \mathbb{N}$ quelconque.
Il existe une constante $C_N$ telle que, pour tout $\zeta \in C_1$ :

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq C_N ||\zeta||^{-N}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_{||\eta-\zeta|| \leq c||\eta||} \hat{\phi}(\eta - \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta\right| &\leq C_N \int_{||\eta-\zeta|| \leq c||\eta||} |\hat{\phi}(\eta - \zeta)|||\zeta||^{-N} d\zeta \\ &\leq C_N \int_{||\eta-\zeta|| \leq c||\eta||} |\hat{\phi}(\eta - \zeta)|((1-c)||\eta||)^{-N} d\zeta \\ &\leq C_N (1-c)^{-N} ||\eta||^{-N} ||\hat{\phi}||_1\end{aligned}$$

donc le premier terme est bien à décroissance rapide.
Puisque $\hat{u}$ est à croissance polynomiale, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\zeta \to (1 + ||\zeta||)^{-M}\hat{u}(\zeta)$ est intégrable. On suppose un tel $M$ fixé.
Puisque $\phi$ appartient à la classe de Schwartz, $\hat{\phi}$ aussi donc il existe $D_{N+M} > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ :

$$|\phi(\xi)| \leq D_{N+M}(1 + ||\xi||)^{-(N+M)}$$

Alors, en supposant $c < 1$ :

$$\begin{aligned}\left|\int_{||\eta-\zeta|| > c||\eta||} \hat{\phi}(\eta - \zeta)\hat{u}(\zeta)d\zeta\right| &\leq \int_{||\eta-\zeta|| > c||\eta||} D_{N+M}(1 + ||\eta - \zeta||)^{-(N+M)}|\hat{u}(\zeta)|d\zeta \\ &\leq \int_{||\eta-\zeta|| > c||\eta||} D_{N+M}(1 + ||\eta - \zeta||)^{-N}(1 + ||\eta - \zeta||)^{-M}|\hat{u}(\zeta)|d\zeta \\ &\leq \int_{||\eta-\zeta|| > c||\eta||} D_{N+M}c^{-N}(1 + ||\eta||)^{-N} \left(\frac{c}{c+1}\right)^{-M} (1 + ||\zeta||)^{-M}|\hat{u}(\zeta)|d\zeta \\ &= C'_N(1 + ||\eta||)^{-N} ||(1 + ||\zeta||)^{-M}|\hat{u}(\zeta)|\,||_1\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que, si $||\eta - \zeta|| > c||\eta||$, alors :

$$||\eta - \zeta|| \geq ||\zeta|| - ||\eta|| \geq ||\zeta|| - \frac{1}{c}||\eta - \zeta|| \qquad \Rightarrow \qquad ||\eta - \zeta|| \geq \frac{c}{c+1}||\zeta||$$

et on a noté $C'_N = D_{N+M}c^{-(N+M)}(c+1)^M$. Donc le deuxième terme est également à décroissance rapide.

c) Si $\xi \notin \Sigma(u)$, alors $\hat{u}$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de $\xi$ donc, d'après la question b), $\widehat{\phi u}$ est également à décroissance rapide sur un voisinage conique de $\xi$. Donc $\xi \notin \Sigma(\phi u)$.

2. a) Soit $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Soit $(x, \xi) \notin WF(v)$. Montrons qu'alors $(x, \xi) \notin WF(\phi v)$.

Par définition du front d'onde, il existe $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, non-nulle en $x$, telle que $\widehat{\chi v}$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de $\xi$.

Soit $\psi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, qui vaut 1 sur un voisinage du support de $\chi$. Alors $\chi(\phi v) = (\phi\psi)(\chi v)$. Puisque $\chi v$ est une distribution à support compact et $\phi\psi$ appartient à la classe de Schwartz, la question précédente montre que $\mathcal{F}(\phi\psi\chi v)$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de $\xi$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(\chi(\phi v))$ est à décroissance rapide sur un voisinage conique de $\xi$. Donc $(x, \xi) \notin WF(\phi v)$.

b) Puisque $\phi_2$ ne s'annule pas sur le support de $\phi_1$, $\phi_1/\phi_2$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, donc appartient à la classe de Schwartz.

Puisque $\phi_2 u$ est une distribution à support compact, la question 1.c) implique :

$$\Sigma(\phi_1 u) = \Sigma\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\phi_2 u\right) \subset \Sigma(\phi_2 u)$$

c) Si $(x, \xi) \in WF(u)$ alors il n'existe pas $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\phi(x) \neq 0$ et $\widehat{\phi u}$ est à décroissance rapide dans un voisinage conique de $\xi$. Cela revient à dire que, pour toute $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\phi(x) \neq 0$, $\xi \in \Sigma(\phi u)$. Donc $\xi \in \Sigma_x(u)$.

Réciproquement, si $(x, \xi) \notin WF(u)$, alors il existe $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\phi(x) \neq 0$ (on peut alors supposer $\phi(x) = 1$) et $\xi \notin \Sigma(\phi u)$. Dans ce cas, $\xi$ n'appartient pas à l'intersection des $\Sigma(\phi u)$ donc $\xi \notin \Sigma_x(u)$.

d) Quitte à remplacer $\Gamma$ par son intérieur, on peut supposer que $\Gamma$ est ouvert.

Notons $B = \{\xi \in \mathbb{R}^n \text{ tq } ||\xi|| = 1\} \cap (\mathbb{R}^n - \Gamma)$. Il s'agit d'un compact de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\xi \in B$, puisque $\xi \notin \Sigma_x(u)$, il existe $\phi_\xi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\phi_\xi(x) = 1$ et $\xi \notin \Sigma(\phi_\xi u)$. Comme $\Sigma(\phi_\xi u)$ est un fermé, cela entraîne qu'il existe un voisinage ouvert de $\xi$ dans $B$, qu'on note $V_\xi$, tel que $V_\xi \cap \Sigma(\phi_\xi u) = \emptyset$.

Soient $\xi_1, ..., \xi_s$ tels que $B \subset V_{\xi_1} \cup ... \cup V_{\xi_s}$. Alors, pour tout $\xi \in B$, il existe $j$ tel que $\xi \in V_{\xi_j}$ et, pour ce $j$, $\xi \notin \Sigma(\phi_{\xi_j} u)$.

Donc $\{\xi \in \mathbb{R}^n \text{ tq } ||\xi|| = 1\} \cap (\mathbb{R}^n - \Gamma) \subset \cup_j(\mathbb{R}^n - \Sigma(\phi_{\xi_j} u))$, c'est-à-dire $\{\xi \in \mathbb{R}^n \text{ tq } ||\xi|| = 1\} \cap (\cap_j \Sigma(\phi_j u)) \subset \Gamma$.

Puisque les ensembles considérés sont des cônes, $\cap_j \Sigma(\phi_j u) \subset \Gamma$.

e) Soit $U = \{x' \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \forall j, \phi_j(x') \neq 0\}$. C'est un voisinage ouvert de $x$.

Si $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbb{R})$, alors, pour tout $j$, $\Sigma(\phi u) \subset \Sigma(\phi_j u)$, d'après la question 3.a). En effet, $\phi_j$ ne s'annule pas sur $U$ donc ne s'annulle pas sur le support de $\phi$. Donc $\Sigma(\phi u) \subset \Gamma$.

**Exercice 4**

1. On utilise le fait que $\widehat{\Delta u}(t, \xi) = -||\xi||^2 \hat{u}(t, \xi)$ :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}(t, \xi) + ||\xi||^2 \hat{u}(t, \xi) &= 0 \\ (\hat{u}, \partial_t \hat{u}) &= (0, \hat{f}) \end{cases}$$

On a alors $\hat{u}(t,\xi) = a(\xi)e^{it||\xi||} + b(\xi)e^{-it||\xi||}$, pour deux fonctions $a$ et $b$ ne dépendant pas de $t$. Les conditions initiales impliquent $a+b=0$ et $i||\xi||(a-b) = \hat{f}$, donc $a = \frac{1}{2i||\xi||}\hat{f}$ et $b=-a$, ce qui donne :

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\frac{e^{it||\xi||} - e^{-it||\xi||}}{2i||\xi||} = \hat{f}(\xi)\frac{\sin(t||\xi||)}{||\xi||}$$

Si $f$ est $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, alors $\hat{f}$ est à décroissance rapide donc, d'après l'expression qu'on vient de trouver, $\hat{u}(t,.)$ aussi, pour tout $t$, ce qui implique que $u(t,.)$ est $\mathcal{C}^\infty$.

2.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{2i}(u_+ - u_-) + \frac{1}{(2\pi)^n}\int (1-\chi(\xi))\frac{\sin(t\xi)}{||\xi||}e^{ix.\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \\
=&\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\chi}{2i||\xi||}(e^{it||\xi||} - e^{-it||\xi||})\hat{f} + (1-\chi)\frac{e^{it||\xi||} - e^{-it||\xi||}}{2i||\xi||}\hat{f}\right) \\
=&\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi)\frac{e^{it||\xi||} - e^{-it||\xi||}}{2i||\xi||}\right)
\end{aligned}$$

ce qui est l'expression qu'on vient de trouver pour $u$.

3. Le membre de droite de la décomposition est la transformée de Fourier inverse d'une fonction continue à support compact (puisque $1-\chi$ est à support compact). C'est donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Donc $WF(u(t)) \subset WF((u_+ - u_-)(t)) \subset WF(u_+(t)) \cup WF(u_-(t))$.

4. Il suffit de montrer que $u_+^2$ est $\mathcal{C}^\infty$.

La fonction $\hat{f}$ est à décroissance rapide sur le cône $\{\xi \text{ tq } 1-\psi(\xi) \neq 0\}$. Comme $\frac{(1-\psi(\xi))\chi(\xi)}{||\xi||}e^{it||\xi||}$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$, $u_+^2$ est la transformée de Fourier inverse d'une fonction à décroissance rapide. C'est donc une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

5. La relation se vérifie en calculant les dérivées partielles.

Formellement, en notant $\delta(\xi) = \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{||\xi||}$ :

$$\begin{aligned}
u_+^1(t,x) &= \int \delta(\xi)e^{i(x.\xi+t||\xi||)}\hat{f}(\xi)d\xi \\
&= \int \delta(\xi)e^{ix.\xi+t||\xi||}\left(\int f(y)e^{-iy.\xi}dy\right)d\xi \\
&= \int f(y)\delta(\xi)e^{i((x-y).\xi+t||\xi||)}d\xi dy \\
&= \sum_j \int_{y\in\mathrm{Supp}f,\xi\in\mathbb{R}^n} f(y)\delta(\xi)\left(\frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{||\xi||}}{i|x-y+t\frac{\xi}{||\xi||}|^2}\right)\partial_j e^{i((x-y).\xi+t||\xi||)}d\xi dy \\
&= -\sum_j \int_{y\in\mathrm{Supp}f,\xi\in\mathbb{R}^n} f(y)(\partial_j\delta_j)(\xi)e^{i((x-y).\xi+t||\xi||)}d\xi dy
\end{aligned}$$

où on a noté $\delta_j(\xi) = \delta(\xi)\left(\frac{x_j-y_j+t\frac{\xi_j}{||\xi||}}{i|x-y+t\frac{\xi}{||\xi||}|^2}\right)$.

La fonction $\delta_j$ est bien définie pour $x \in U$ car, d'après les hypothèses de l'énoncé, $x - y + t\frac{\xi}{||\xi||}$ ne s'annule pas si $y \in \text{Supp}(f)$ et $\chi(\xi) \neq 0$.
À $x$ et $y$ fixés, $\delta_j$ est une fonction homogène de degré $-1$ en $\xi$, en-dehors d'un voisinage de 0. Donc $\partial_j \delta_j$ est homogène de degré $-2$ en $\xi$ en-dehors d'un voisinage de 0.
En réitérant le processus, on voit qu'on peut écrire, pour tout $K \geq 1$ :

$$u_+^1(t,x) = \sum_{j \leq N_K} \int_{y \in \text{Supp} f, \xi \in \mathbb{R}^n} f(y) \alpha_j^K(x,y,\xi) e^{i((x-y).\xi + t||\xi||)} d\xi dy$$

où les $\alpha_j^K$ sont des fonctions homogènes de degré $-K$ en $\xi$, en-dehors d'un voisinage de 0. Lorsque $K$ est assez grand, toutes les intégrales de la somme sont convergentes. De plus, pour tout $s$, $\alpha_j^K$ est $s$ fois dérivable en $x$ si $K$ est assez grand et on peut vérifier que le théorème de convergence dominée s'applique. Donc $u_+^1$ est $s$ fois dérivable en $x$.
Puisque c'est vrai pour tout $s$, $u_+^1$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Pour justifier rigoureusement les égalités formelles entre intégrales qui ne convergent pas, on commence par supposer que $f$ appartient à la classe de Schwarz ; le résultat sera ensuite étendu à toutes les fonctions $L^2$ par densité. Ensuite, on régularise l'intégrale au moyen de la fonction $\xi \to e^{-\epsilon||\xi||^2}$ puis on fait tendre $\epsilon$ vers 0 comme dans la démonstration de la formule d'inversion de Fourier.

6. La question précédente montre que, si $x_0 \notin \text{Supp}(f) - t\Sigma_1(f)$, alors $x_0 \notin \text{singsupp}(u_+(t))$. De la même manière, on montre que, si $x_0 \notin \text{Supp}(f) + t\Sigma_1(f)$, alors $x_0 \notin \text{singsupp}(u_-(t))$. Donc, si $x_0 \notin \text{Supp}(f) \pm t\Sigma_1(f)$, $x_0$ n'appartient ni au support singulier de $u_+(t)$ ni au support singulier de $u_-(t)$ et donc, d'après la question 3., $x_0$ n'appartient pas au support singulier de $u(t)$ (remarquons que le support singulier est la projection sur la première coordonnée du front d'onde).
Utilisons ce résultat pour montrer le théorème demandé.
Soit $x_0$ tel qu'il n'existe pas $(x,\xi) \in WF(f)$ tel que $x_0 = x \pm t\frac{\xi}{||\xi||}$.
Pour tout $x' \in \text{Supp}(f)$, soit $C_{x'}$ un voisinage conique fermé de $\Sigma_{x'}(f)$ tel que, pour tout $\xi \in C_{x'}$ :

$$x_0 \neq x' \pm t\frac{\xi}{||\xi||} \tag{1}$$

D'après la question 3.d) de l'exercice 3, il existe $U_{x'}$ un voisinage de $x'$ tel que, pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support inclus dans $U_{x'}$, $\Sigma(\phi f) \subset C_{x'}$. Quitte à rétrécir $U_{x'}$, on peut de plus renforcer (1) en :

$$\forall x'' \in U_{x'}, \forall \xi \in C_{x'}, \qquad x_0 \neq x'' \pm t\frac{\xi}{||\xi||}$$

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support inclus dans $U_{x'}$, on aura alors :

$$x_0 \notin \text{Supp}(f\phi) \pm t\Sigma_1(f\phi) \tag{2}$$

Comme $\text{Supp}(f)$ est compact, on peut choisir $U_{x'_1}, ..., U_{x'_s}$ un recouvrement de $\text{Supp}(f)$ par de tels ouverts.

Soit $(\phi_1, ..., \phi_s)$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. On a alors $f = (f\phi_1) + ... + (f\phi_s)$ et $u = u_1 + ... + u_s$ où, pour tout $s' \leq s$, $u_{s'}$ est la solution de l'équation des ondes lorsqu'on a remplacé $f$ par $f\phi_{s'}$.
Pour tout $s'$, d'après la propriété (2) et la remarque faite au début de la question, $x_0 \notin \text{singsupp}(u_{s'})$.
Puisque, pour tout $s'$, $x_0 \notin \text{singsupp}(u_{s'})$, $x_0 \notin \text{singsupp}(u)$.