TD 4 – Espaces L^p

1 – Petites questions

1. Donner un exemple de fonction $f \in L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ telle que $f \notin L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ pour tout $p > 1$, et un exemple de fonction $f \in L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ avec $p > 1$ telle que $f \notin L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.
   Que se passe-t-il si l'on remplace $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$?
2. (*Un corollaire important de la démonstration de la complétude de L^p*) Soient $p \geq 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E,\mathcal{A},\mu)$ qui converge dans L^p vers f. Montrer qu'il existe une extractrice ϕ et une fonction $h \in L^p(E,\mathcal{A},\mu)$ telle que $f_{\phi(n)} \to f$ μ-p.p. et $|f_{\phi(n)}| \leq h$ pour tout $n \geq 1$, μ-p.p.
3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E,\mathcal{A},\mu)$ qui converge dans L^p vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $f = g$ μ-p.p.
4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E,\mathcal{A},\mu) \cap L^q(E,\mathcal{A},\mu)$ avec $p,q \in [1,+\infty[$. On suppose que $f_n \to 0$ dans L^p et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^q. Montrer que $f_n \to 0$ dans L^q.

Corrigé.

1. Pour le premier exemple, on peut prendre
   $$f(x) = \frac{1}{x\ln(x)^2}\mathbb{1}_{x\in]0,1/2[}.$$
   Pour le deuxième exemple, on peut prendre
   $$f(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{x\geq 1}.$$
   Si l'on remplace $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$, le premier exemple fonctionne toujours. En revanche, si $f \in L^p([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ pour un certain $p > 1$, alors on a, par l'inégalité de Hölder, $\|f\|_1 \leq \|f\|_p \|1\|_q = \|f\|_p$, donc $f \in L^1([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$.
2. Quand $p = \infty$, on a convergence uniforme de f_n vers f sur un ensemble de complémentaire de mesure nulle. Donc il n'y a pas besoin d'extraire une sous-suite : on a $f_n \to f$ μ-p.p. D'autre part, on peut prendre $h = \sup_{n\geq 0}|f_n|$ ou bien la fonction constante $h = \sup_{n\geq 0}\|f_n\|_\infty$.
   On suppose à présent $p < \infty$. Comme la suite (f_n) est convergente, elle est de Cauchy et on peut alors choisir une extractrice ϕ telle que
   $$\left\|f_{\phi(n+1)} - f_{\phi(n)}\right\|_p \leq \frac{1}{2^n}.$$
   (par exemple, prendre $\phi(n) = \min\{k > \phi(n-1) : \forall l \geq k, \|f_l - f_k\|_p < 2^{-n}\}$. Pour simplifier les notations, on pose $g_n = f_{\phi(n)}$.
   Par le théorème de convergence monotone puis l'inégalité de Minkowski, on montre que
   $$\sum_{n=0}^{\infty}|g_{n+1} - g_n| \in L^p. \tag{1}$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Cette dernière série est donc μ-p.p. finie, autrement dit la série de terme général $g_{n+1} - g_n$ converge absolument, μ-p.p. Elle converge donc μ-p.p. On peut ainsi poser :

$$F := g_0 + \sum_{n\geq 0}(g_{n+1} - g_n).$$

et alors on a bien

$$g_n = g_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(g_{k+1} - g_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-p.p}} F.$$

D'autre part on pose

$$h := |g_0| + \sum_{n\geq 0}|g_{n+1} - g_n|.$$

Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g_n| \leq h$ et, par (1), on a $h \in L^p$. Enfin, par convergence dominée appliquée à $|g_n - F|^p$ dominé par $2^p\,|h|^p$, on obtient que $g_n \to F$ dans L^p, or on a déjà $f_n \to f$ dans L^p, donc $f = F$ μ-p.p. et donc g_n converge bien μ-p.p. vers f.

3. D'après la question 2., il existe une extractrice ϕ telle que $f_{\phi(n)} \to f$ μ-p.p. Mais $f_{\phi(\psi(n))} \to g$ μ-p.p., et donc $f = g$ μ-p.p.
4. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^q donc il existe une fonction $f \in L^q$ telle que $f_n \to f$ dans L^q. D'après la question 2., il existe une extractrice ϕ telle que $f_{\phi(n)} \to f$ μ-p.p. Par ailleurs $f_{\phi(n)} \to 0$ dans L^p. Donc, par la question 3., $f = 0$ μ-p.p.

2 – Quelques calculs

Exercice 1.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $(E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0}\int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0}\left(\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\right) = \int_E\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\mathrm{d}\mu.$$

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x.$$

Corrigé.

1. D'après le théorème de convergence monotone, la fonction $\sum_{n\geq 0}|f_n|$ est intégrable. Cela implique que la fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ existe et est intégrable. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} f_n\right| \leq \sum_{n\geq 0}|f_n| \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N} f_n \xrightarrow[N\to\infty]{\mu\text{-p.p.}} \sum_{n\geq 0} f_n.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_E\left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)\mathrm{d}\mu \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_E\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\mathrm{d}\mu.$$

Par ailleurs, pour tout $N \geq 0$,

$$\int_E\left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{N}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Et $\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu$ est le terme général d'une série absolument convergente par hypothèse. En passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient le résultat.

2. Pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \ln(x).$$

Posons pour tout $n \geq 0$, $f_n \colon x \in]0,1[\mapsto x^n \ln(x)$. Alors, par une intégration par parties, on obtient,

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc $\sum_{n\geq 0} \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. On peut donc appliquer la question 1. et l'on trouve,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 0} x^n \ln(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Autre possibilité (un peu plus rapide) : Écrire $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$ et développer plutôt en série entière $\ln(1-x)$.

Passons à la seconde intégrale. Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = e^{-x}\frac{\sin(ax)}{1-e^{-x}} = \sum_{n\geq 0} e^{-(n+1)x}\sin(ax).$$

Posons pour tout $n \geq 0$, $f_n \colon x \in]0,+\infty[\mapsto e^{-(n+1)x}\sin(ax)$. Alors, pour tout $x > 0$, $|f_n| \leq axe^{-(n+1)x}$, et

$$\sum_{n\geq 0} \int_0^\infty |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n\geq 0} \int_0^\infty axe^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

Ainsi, d'après la question 1.,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a,

$$\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(e^{-(n+1)x}\frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(n+1)x - iax} - \frac{1}{(n+1)x + iax}\right) = \frac{a}{(n+1)^2 + a^2}.$$

Donc,

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

3 – Espaces L^p

Exercice 2. (*Lemme de Scheffé*) Soient $p \in [1,\infty[$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E,\mathcal{A},\mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de $L^p(E,\mathcal{A},\mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Indication. Considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, un peu comme dans la preuve du théorème de convergence dominée.

Corrigé. L'implication est toujours vérifiée (même sans convergeance μ-p.p.) car

$$\left|\|f_n\|_p - \|f\|_p\right| \leq \|f_n - f\|_p$$

d'après l'inégalité triangulaire.

Pour la réciproque, comme suggéré, introduisons $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, qui est une fonction positive et convergeant μ-p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$. Par le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned}2^{p+1}\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_E \liminf_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E g_n \,\mathrm{d}\mu \\ = \liminf_{n\to\infty}\left(2^p\int_E (|f_n|^p + |f|^p)\,\mathrm{d}\mu - \int_E |f_n - f|^p\right) \\ = 2^{p+1}\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|^p,\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ lorsque $n\to\infty$ pour la dernière égalité (et le fait que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\liminf a_n + b_n = \lim a_n + \liminf b_n$, alors qu'en général on a seulement $\liminf a_n + b_n \geq \liminf a_n + \liminf b_n$). Ainsi

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|^p \leq 0,$$

ce qui donne $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Remarque. Si on oublie l'hypothèse de convergence μ-p.p., la réciproque est fausse (trouvez un contre-exemple !).

Exercice 3. Soient $r, s \in [1,\infty[$ et $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \leq c|y|^{r/s}. \tag{2}$$

Soit Φ l'application de $L^r(X,\mathcal{A},\mu) \to L^s(X,\mathcal{A},\mu)$ définie par $\Phi(f) = g\circ f$.

1. Vérifier que $\Phi(f) \in L^s(X,\mathcal{A},\mu)$.
2. Montrer que Φ est continue.

   Indication. On pourra utiliser le critère séquentiel de la continuité, et utiliser la question 2. des petites questions.
3. On prend ici $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Montrer que si g ne vérifie pas (2), alors il existe $f \in L^r(X,\mathcal{A},\mu)$ telle que $\Phi(f) \notin L^s(X,\mathcal{A},\mu)$.

Corrigé.

1. Par hypothèse, pour $f \in L^r$, $|\Phi(f)(x)|^s = |g(f(x))|^s \leq c^s|f(x)|^r$ est intégrable.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions telle que $f_n \to f$ dans L^r. Montrons que $\Phi(f_n)\to\Phi(f)$ dans L^s. À cet effet, on utilise le lemme des sous-sous-suites suivant (qui se démontre aisément en raisonnant par l'absurde), et qui rend parfois de bien précieux services :

   Lemme des sous-sous-suites. Soit (E,d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E converge vers $x\in E$ si et seulement de toute suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ on peut ré-extraire une sous-suite ψ telle que $(x_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ converge vers x.

   Soit donc ϕ une extractrice fixe. Comme $f_{\phi(n)} \to f$ dans L^r, il existe une extractrice ψ et $h \in L^r$ tels que $f_{\phi(\psi(n))} \to f$ μ-p.p. et $|f_{\phi(\psi(n))}| \leq |h|$ pour tout $n \geq 1$. Mais alors

   $$\left|g(f_{\phi(\psi(n))}) - g(f)\right|^s \xrightarrow[n\to\infty]{\mu\text{-p.p.}} 0$$

   par continuité de g, et

   $$\left|g(f_{\phi(\psi(n))}) - g(f)\right|^s \leq 2^s\left(\left|g(f_{\phi(\psi(n))})\right|^s + |g(f)|^s\right) \leq (2c)^s(|h(x)|^r + |f(x)|^r) \in L^1.$$

   Le théorème de convergence dominée implique :

   $$\int \left|g(f_{\phi(\psi(n))}) - g(f)\right|^s \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui revient dire que $g(f_{\phi(\psi(n))}) \to g(f)$ dans L^s, et conclut la question.

Remarque sur le lemme des sous-sous-suites. En combinant le lemme des sous-sous-suites avec la petite question 2., on obtient que, si la convergence μ-p.p. était métrisable, alors la convergence L^p impliquerait la convergence μ-p.p. Or on sait que c'est faux sur $([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda)$ pour tous $a<b$ avec l'exemple du stroboscope infernal (voir TD 2). Donc la convergence λ-p.p. n'est pas métrisable sur $([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda)$ et, en particulier, le lemme des sous-sous-suites ne s'applique pas à la convergence λ-p.p. (de manière générale il ne s'applique pas à la convergence simple non plus).

3. Considérons une suite $(y_n)_{n\ge1}$ telle que $|g(y_n)| > n|y_n|^{r/s}$. Définissons alors la fonction étagée f comme suit :
$$f = \sum_{n\ge1} y_n \mathbb{1}_{A_n},$$
où les $(A_n)_{n\ge1}$ sont des boréliens disjoints tels que $\lambda(A_n) = 1/(n^{1+s}|y_n|^r)$. Alors
$$\|f\|_r^r = \sum_{n\ge1} |y_n|^r \lambda(A_n) = \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^{1+s}} < \infty,$$
mais
$$\|g\circ f\|_s^s = \sum_{n\ge1} |g(y_n)|^s \lambda(A_n) > \sum_{n\ge1} n^s |y_n|^r \mu(A_n) = \sum_{n\ge1} \frac{1}{n} = \infty.$$

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 4.

1. Soient $p\in[1,\infty[$ et $f\in L^p(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\lambda)$. Pour $x\ge0$, on pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors
$$\lim_{h\to0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |F(x+h)-F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$
2. En déduire que si g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g'\in L^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p\in[1,\infty[$, alors $g(x)\to0$ quand $x\to\infty$.

Corrigé.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f\in L^p([0,x])\subset L^1([0,x])$ donc F est bien définie. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a, d'après l'inégalité de Hölder,
$$|F(x+h)-F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f\,\mathrm{d}\lambda\right| \le \left(\int_x^{x+h} |f|^p\,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/p} |h|^{1/q}.$$
On pose $G(x)=\int_0^x |f|^p\,\mathrm{d}\lambda$. Alors G est une fonction uniformément intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on peut le montrer à la main ou remarquer que c'est une conséquence immédiate de l'uniforme continuité de l'intégrale vue au TD 2). On a donc
$$\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|F(x+h)-F(x)|}{|h|^{1/q}} \le \sup_{x\in\mathbb{R}_+} (|G(x+h)-G(x)|)^{1/p} \xrightarrow[h\to0]{} 0.$$
2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $g(x)=g(0)+\int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t$. D'après la question 1.,
$$\lim_{h\to0}\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x+h)-g(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \geq n$ tel que $g(x_n) > \varepsilon$. Il existe $h_0 \in]0,1[$ tel que pour tout $h \leq h_0$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon |h|^{1/q}}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [x_n, x_n + h_0]$, on a $g(t) \geq \varepsilon/2$. La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ peut-être choisie de sorte que les intervalles $[x_n, x_n + h_0]$ soient disjoints. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}_+} |g(t)| \, \mathrm{d}t \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{x_n}^{x_n + h_0} |g(t)| \, \mathrm{d}t \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon h_0}{2} = \infty,$$

ce qui contredit l'intégrabilité de g.

Exercice 5. Soit f une fonction mesurable sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$ non nulle. Pour $0 < p < \infty$, on pose

$$\varphi(p) := \int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu \quad \text{et} \quad I := \{p \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(p) < \infty\}.$$

1. Montrer que I est un intervalle. Est-il fermé ? ouvert ?
2. Montrer que $\ln \varphi$ est convexe sur I et que φ est continue sur I.

Corrigé.

1. Soient $a, b \in I$, $a < b$ et $t \in]0,1[$. On pose $\frac{1}{p} = t$ et $\frac{1}{q} = (1-t)$, l'inégalité de Hölder donne

$$\left(\int_E |f|^{ta + (1-t)b} \, \mathrm{d}\mu \right) \leq \left(\int_E |f|^a \, \mathrm{d}\mu \right)^t \left(\int_E |f|^b \, \mathrm{d}\mu \right)^{1-t}, \tag{3}$$

   ce qui montre donc que I est un intervalle.
   En considérant les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto 1/(x \ln(x)^2)$ sur $[2, +\infty]$ muni de la mesure de Lebesgue, on voit que I n'est pas nécéssairement fermé ou ouvert.
2. En passant au logarithme dans l'inégalité (3) on obtient que $\ln \varphi$ est convexe sur l'intérieur de l'intervalle $\mathring{I}$, donc en particulier φ est convexe sur $\mathring{I}$, elle y est continue.
   Si $a := \inf I \in I$, on considère (a_n) une suite décroissante vers a et on a alors

$$|f|^{a_n} \leq \mathbb{1}_{\{|f| \geq 1\}} |f|^{a_0} + \mathbb{1}_{\{|f| \leq 1\}} |f|^a,$$

   et $|f|^{a_n} \to |f|^a$ μ-p.p. Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que φ est continue en a.
   De manière similaire, si $b := \sup I \in I$, on montre que φ est continue en b. Ainsi φ est continue sur I et $\ln \circ \varphi$ est convexe sur I (car convexe sur $\mathring{I}$ et continue sur I).

Exercice 6. Soit f une fonction mesurable sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$ telle que pour tout $p > 0$, $\|f\|_p < \infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ quand $p \to \infty$.
2. Dans le cas où $\|f\|_\infty = \infty$, peut-on avoir la convergence précédente aussi lentement que l'on veut ? Plus précisément, pour $h \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{p \to \infty} h(p) = \infty$, existe-t-il une fonction f telle que $\|f\|_\infty = \infty$, mais $\|f\|_p \leq h(p)$ pour tout p suffisamment grand ?

Corrigé.

1. Si $\|f\|_\infty = 0$ alors $f = 0$ μ-p.p. et donc $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ quand $p \to \infty$.
Supposons maintenant $\|f\|_\infty > 0$. Soit $0 \le A < \|f\|_\infty$. On a alors

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \ge (A^p \mu(\{|f| \ge A\}))^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} A.$$

Donc $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge A$ pour tout $0 < A < \|f\|_\infty$ et ainsi $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty$. D'autre part on a $\|f\|_p \le \|f\|_\infty$ donc ça montre le résultat.

2. Cela dépend de l'espace sur lequel on travaille.
Premier cas. Si $\delta := \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0\} > 0$, alors il n'existe pas de telle fonction. En effet, sur un tel espace, une fonction f telle que $\|f\|_\infty = \infty$ vérifie : pour tout $p > 0$, $\|f\|_p = \infty$. Pour voir cela, on remarque que pour tout $A > 0$, on a $\|f\|_p \ge A\mu(\{|f| \ge A\})^{1/p} \ge A\delta^{1/p}$, car $\mu(\{|f| \ge A\}) > 0$.
Deuxième cas. Si $\inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) > 0\} = 0$, alors il existe une telle fonction et nous allons la construire. Soit ϕ, ψ des fonctions que nous allons fixer plus tard, telles que croissantes telles que $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ est décroissante et $\psi\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{N}$ est croissante et tend vers l'infini en l'infini. Soit f positive telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \mu(\{f = k\}) \le \mathrm{e}^{-k}\phi(k). \tag{4}$$

Alors on a, par théorème de convergence monotone,

$$\int_E f^p \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f^p \mathbb{1}_{f=k} \,\mathrm{d}\mu \le \sum_{k=1}^{\infty} k^p \mathrm{e}^{-k}\phi(k).$$

On découpe alors la somme en $\psi(p)$, puis on majore par une intégrale :

$$\begin{aligned}\int_E f^p \,\mathrm{d}\mu &\le \phi(1)\sum_{k=1}^{\psi(p)} k^p \mathrm{e}^{-k} + \phi(\psi(p)) \sum_{k=\psi(p)+1}^{\infty} k^p \mathrm{e}^{-k} \\ &\le \phi(1)\psi(p)\psi(p)^p + \phi(\psi(p)) \int_{\psi(p)}^{\infty} x^p \mathrm{e}^{-(x-1)} \,\mathrm{d}x \\ &\le \phi(1)\psi(p)^{p+1} + \phi(\psi(p)) \cdot \mathrm{e} \cdot \Gamma(p+1).\end{aligned}$$

On rappelle que pour $p \ge 1$ et $a, b \ge 0$, on a $(a+b)^{1/p} \le a^{1/p} + b^{1/p}$. On obtient donc

$$\|f\|_p \le \phi(1)^{1/p}\psi(p)^{(p+1)/p} + \mathrm{e}^{1/p}\Big(\phi(\psi(p))\Gamma(p+1)\Big)^{1/p} \le \phi(1)\psi(p)^2 + \mathrm{e}\Big(\phi(\psi(p))\Gamma(p+1)\Big)^{1/p}.$$

On choisit alors ψ telle que $\phi(1)\psi(p)^2 \le h(p)/2$ mais $\psi(p) \to \infty$ quand $p \to \infty$, puis ϕ telle que $\phi(\psi(p))\Gamma(p+1) = 1$. Ainsi une fonction f satisfaisant (4) vérifie $\|f\|_p \le h(p)$ pour p suffisamment grand. Construisons à présent f satisfaisant (4). Pour cela il suffit de contruire une suite d'ensembles $A_k \in \mathcal{A}$ disjoints deux à deux telle que, pour tout $k \ge 1$, $0 < \mu(A_k) \le \mathrm{e}^{-k}\phi(k)$. On procède par récurrence. Tout d'abord, par hypothèse, il existe B_1 tel que $0 < \mu(B_1) \le \mathrm{e}^{-1}\phi(1)$. Puis, on choisit B_k tel que $0 < \mu(B_k) \le \mathrm{e}^{-k}\phi(k)$ et aussi, pour tout $1 \le j \le k-1$, $\mu(B_k) \le \mu(B_j)4^{j-k}$. Alors on pose

$$A_k := B_k \setminus \bigcup_{l>k} B_l.$$

Il est clair que $\mu(A_k) \le \mathrm{e}^{-k}\phi(k)$ et on a

$$\mu(A_k) \ge \mu(B_k) - \sum_{l>k} \mu(B_l) \ge \mu(B_k) - \sum_{l>k} \mu(B_k)4^{k-l} = \mu(B_k)\left(1 - \sum_{l=1}^{\infty} 4^{k-l}\right) > 0,$$

ce qui conclut la construction.

Exercice 7. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1, \infty[$. Soit $g \colon E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour toute fonction $f \in L^p$, on ait $fg \in L^p$. Montrer que $g \in L^\infty$.

Corrigé. Approche pedestre. On note $(E_k)_{k \geq 0}$ une suite croissante d'ensembles mesurables telle que $\mu(E_k) < \infty$ pour tout $k \geq 0$ et $\bigcup_{k \geq 0} E_k = E$. Supposons que $g \notin L^\infty$. Alors il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que l'ensemble $\{2^n < |g| \leq 2^{n+1}\}$ est de mesure non nulle, il y a donc une infinité de n tels que pour un certain k,

$$X_{n,k} := \{2^n < |g| \leq 2^{n+1}\} \cap E_k$$

est de mesure non nulle (et finie). Soit Y_m une suite d'ensembles définie comme suit : $Y_m = X_{n_m, k_m}$ telle que la suite $(n_m)_{m \geq 1}$ est strictement croissante (en particulier $n_m \geq m$) et $\mu(Y_m) > 0$. Il est facile de vérifier que tous les Y_m sont disjoints. Posons

$$f := \sum_{m \geq 0} 2^{-m} (\mu(Y_m))^{-1/p} \mathbb{1}_{Y_m}.$$

Alors

$$\int_E f^p \, \mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{m \geq 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_m} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{m \geq 0} 2^{-mp} < \infty,$$

et par ailleurs,

$$\int_E |fg|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{m \geq 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_n} |g|^p \, \mathrm{d}\mu \geq \int_E \sum_{m \geq 0} 2^{-mp} (\mu(Y_m))^{-1} \mathbb{1}_{Y_m} 2^{mp} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{m \geq 0} 1 = \infty.$$

On a donc construit une fonction $f \in L^p$ telle que $fg \notin L^p$ ce qui est impossible.

Approche astucieuse (due à Quentin Guignard). Considérons l'application linéaire $\Phi \colon f \mapsto fg$ de L^p dans L^p. Montrons que Φ est continue. Comme L^p est un espace de Banach, d'après le théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que si $f_n \to f$ dans L^p et $\Phi(f_n) \to h$ dans L^p, alors $h = \Phi(f)$. À cet effet, considérons une extractrice ϕ telle que $f_{\phi(n)} \to f$ μ-p.p. (par la petite question 2.). On a donc $\Phi(f_{\phi(n)}) = f_{\phi(n)} g \to fg = \Phi(f)$ μ-p.p. Mais $\Phi(f_{\phi(n)}) \to h$ dans L^p donc $h = \Phi(f)$ μ-p.p. (par la petite question 3.).

Notons M la norme d'opérateur de Φ de sorte que $\|\Phi(f)\|_p \leq M \|f\|_p$ pour tout $f \in L^p$. On suppose $M > 0$ (sinon on conclut facilement). Soit A un ensemble mesurable tel que $\mu(A) < \infty$ et appliquons l'inégalité précédente en prenant $f = \mathbb{1}_{|g| \geq 2M} \cdot \mathbb{1}_A$ (qui est dans L^p car $\mu(A) < \infty$) :

$$2M \mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A)^{1/p} \leq \left\| g \mathbb{1}_{|g| \geq 2M} \cdot \mathbb{1}_A \right\|_p \leq M \left\| \mathbb{1}_{|g| \geq 2M} \cdot \mathbb{1}_A \right\|_p = M \mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A)^{1/p}.$$

Ainsi, $2M \mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A)^{1/p} \leq M \mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A)^{1/p}$, ce qui implique que $\mu(\{|g| \geq 2M\} \cap A) = 0$ et donc que $|g| \leq 2M$ sur A, μ-p.p. On conclut par σ-additivité.

Fin