TD 4 – Espaces L^p

1 – Petites questions

1. Donner un exemple de fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f \notin L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p > 1$, et un exemple de fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $p > 1$ telle que $f \notin L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
   Que se passe-t-il si l'on remplace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$?
2. (*Un corollaire important de la démonstration de la complétude de L^p*) Soient $p \geq 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge dans L^p vers f. Montrer qu'il existe une extractrice ϕ et une fonction $h \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $f_{\phi(n)} \to f$ μ-p.p. et $|f_{\phi(n)}| \leq h$ pour tout $n \geq 1$, μ-p.p.
3. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge dans L^p vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $f = g$ μ-p.p.
4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E, \mathcal{A}, \mu) \cap L^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ avec $p, q \in [1, +\infty[$. On suppose que $f_n \to 0$ dans L^p et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^q. Montrer que $f_n \to 0$ dans L^q.

2 – Quelques calculs

Exercice 1.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $(E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \int_E |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \left(\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \right) = \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n \right) \mathrm{d}\mu.$$

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} \,\mathrm{d}x.$$

3 – Espaces L^p

Exercice 2. (*Lemme de Scheffé*) Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p .$$

Indication. Considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, un peu comme dans la preuve du théorème de convergence dominée.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 3. Soient $r, s \in [1, \infty[$ et $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \leq c|y|^{r/s}. \tag{1}$$

Soit Φ l'application de $L^r(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^s(X, \mathcal{A}, \mu)$ définie par $\Phi(f) = g \circ f$.

1. Vérifier que $\Phi(f) \in L^s(X, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Montrer que Φ est continue.
   Indication. On pourra utiliser le critère séquentiel de la continuité, et utiliser la question 2. des petites questions.
3. On prend ici $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Montrer que si g ne vérifie pas (1), alors il existe $f \in L^r(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $\Phi(f) \notin L^s(X, \mathcal{A}, \mu)$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 4.

1. Soient $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

2. En déduire que si g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g' \in L^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p \in [1, \infty[$, alors $g(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

Exercice 5. Soit f une fonction mesurable sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$ non nulle. Pour $0 < p < \infty$, on pose

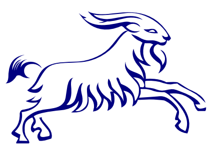
$$\varphi(p) := \int_E |f|^p \,\mathrm{d}\mu \quad \text{et} \quad I := \{p \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(p) < \infty\}.$$

1. Montrer que I est un intervalle. Est-il fermé ? ouvert ?
2. Montrer que $\ln \varphi$ est convexe sur I et que φ est continue sur I.

Exercice 6. Soit f une fonction mesurable sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$ telle que pour tout $p > 0$, $\|f\|_p < \infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ quand $p \to \infty$.
2. Dans le cas où $\|f\|_\infty = \infty$, peut-on avoir la convergence précédente aussi lentement que l'on veut ? Plus précisément, pour $h \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{p \to \infty} h(p) = \infty$, existe-t-il une fonction f telle que $\|f\|_\infty = \infty$, mais $\|f\|_p \leq h(p)$ pour tout p suffisamment grand ?

Exercice 7. (★) Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1, \infty[$. Soit $g \colon E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour toute fonction $f \in L^p$, on ait $fg \in L^p$. Montrer que $g \in L^\infty$.



Fin