

Géométrie Différentielle, TD 4 du 14 mars 2014

1. Équation globale d'une sous-variété

Soit M une variété C^∞ et $N \subset M$ une sous-variété fermée C^∞ de M .

- 1- Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage U_x de x dans M et une fonction C^∞ $F_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.
- 2- Montrer qu'il existe une fonction lisse $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $N = F^{-1}(0)$.

2. Connexité

Soit Y une variété connexe de dimension n et X une sous-variété de Y de dimension $\leq n - 2$. Montrer que $Y - X$ est connexe.

3. Image d'une variété

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application C^∞ entre variétés.

Montrer que si f est une immersion propre dont les fibres non vides ont cardinal constant d , $f(X)$ est une sous-variété de Y .

4. Fibration de Hopf

- 1- Soit $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{C} . Montrer qu'il est muni d'une structure de variété C^∞ par les paramétrages locaux $\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \mapsto x + iy \end{cases}$ et $\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \mapsto \frac{1}{x+iy} \end{cases}$.
- 2- On identifie \mathbb{S}^3 avec la sphère unité de \mathbb{C}^2 . On définit alors une action de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^3 par $\theta \cdot (z_1, z_2) = (e^{2i\pi\theta} z_1, e^{2i\pi\theta} z_2)$ pour $\theta \in \mathbb{S}^1$. Pour tout $z = (z_1, z_2)$, montrer que $\theta \mapsto \theta \cdot z$ est un plongement (i.e. une immersion injective propre) de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{S}^3 .
- 3- On définit une application $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ par $\pi(z_1, z_2) = z_1/z_2$. Montrer que cette application est C^∞ et submersive. Quelles sont ses fibres ?
- 4- Montrer que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, il existe un voisinage U de z et un difféomorphisme ψ entre $\pi^{-1}(U)$ et $U \times \mathbb{S}^1$ tel que $\pi \circ \psi^{-1} : U \times \mathbb{S}^1 \rightarrow U$ est la première projection.

On dit que π est un *fibré localement trivial de fibre \mathbb{S}^1* .

5. Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P = \sum a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$. On montre que l'application polynomiale définie par P est surjective.

- 1– Montrer que l'application polynomiale de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par P s'étend en une application lisse f de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$.
- 2– Montrer que f a un nombre fini de points critiques. Quand le point à l'infini est-il un point critique ?
- 3– Soit y une valeur régulière dans l'image de f . Montrer qu'il existe un voisinage V_y de y dans $\widehat{\mathbb{C}}$ et un nombre fini d'ouverts disjoints U_i de $\widehat{\mathbb{C}}$ tels que $f^{-1}(V_y) = \bigcup U_i$ et tels que la restriction de f à chaque U_i réalise un difféomorphisme de U_i sur V_y .
- 4– Montrer que toutes les fibres de f au-dessus des valeurs régulières (i.e. les préimages $f^{-1}(y)$) sont toutes de même cardinal et conclure.

6. Plongements du plan projectif

- 1– Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ donnée par $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}yz)$.
Montrer que $M = \Phi(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^6 .
- 2– Montrer que $M \cap \mathbb{S}^5$ est une sous-variété de \mathbb{S}^5 , difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
- 3– Montrer que cette construction fournit en fait un plongement de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans \mathbb{S}^4 (remarque que Φ envoie \mathbb{S}^2 sur un hyperplan affine de \mathbb{R}^6).

7. Ruban de Möbius

- 1– Soit X une variété C^∞ de dimension n . Montrer que $X \times \mathbb{R}$ est naturellement muni d'une structure de fibré vectoriel de rang 1 sur X . On dit qu'un fibré vectoriel de rang 1 isomorphe à celui-ci est **trivial**.
- 2– Soit $p : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel de rang 1 sur X . Montrer que E est trivial si et seulement si il existe une application C^∞ $s : X \rightarrow E$ telle que $p \circ s = \text{Id}$ et $s(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$.
- 3– Identifions \mathbb{S}^1 au cercle unité dans \mathbb{C} , de sorte que $z \mapsto -z$ est une involution sans point fixe de \mathbb{S}^1 . Quel est le quotient $\pi : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ par cette involution ?
- 4– Soit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ le fibré vectoriel de rang 1 trivial sur \mathbb{S}^1 . Montrer que le quotient de ce fibré vectoriel par l'involution $(z, t) \mapsto (-z, -t)$ est un fibré vectoriel E de rang 1 sur X .
- 5– Montrer que $E \rightarrow X$ n'est pas un fibré vectoriel trivial.

8. Un difféomorphisme

Montrer que TS^{n-1} est difféomorphe à la sous-variété de \mathbb{C}^n d'équation $\sum z_i^2 = 1$.