Géométrie Différentielle, TD 4 du 9 mars 2015

Dans ce TD et les suivants, on pourra librement utiliser l'existence de partitions de l'unité sur une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, et soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M. Une* partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$ *est la donnée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs positives, $(\varphi_i)_{i\in I}$, telles que*
– φ_i est à support dans U_i ;
– Pour tout x dans M, il existe un voisinage V de x dans M telles que toutes les fonctions φ_i sont nulles sur V, sauf un nombre fini ;
– $\sum_i \varphi_i = 1$, la somme étant finie en tout point, d'après le point précédent.

Théorème 2. *Pour toute sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ et tout recouvrement ouvert de M, il existe une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.*

1. Équation globale d'une sous-variété

Soit N une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^n$.

1– Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un voisinage U_x de x dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $F_x : U_x \to \mathbb{R}^+$ telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

2– Montrer qu'il existe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $N = F^{-1}(0)$.

2. Restriction de fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de X dans $\mathbb{R}$. On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si, pour tout x dans X, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction lisse $g : U \to \mathbb{R}$ telle que f et g coïncident sur $X \cap U$.

1– Montrer que cette définition est équivalente à la définition par paramétrisations dans le cas où X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2– Si X est une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^n$, montrer que toute application $\mathcal{C}^\infty$ sur X est restriction d'une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

3– Le point précédent reste-t-il vrai pour une sous-variété quelconque ?

3. Fibration de Hopf

1– On identifie $\mathbb{S}^3$ avec la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. On définit alors une action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{S}^3$ par $u.(z_1, z_2) = (uz_1, uz_2)$ pour $u \in \mathbb{S}^1$. Pour tout $z = (z_1, z_2)$, montrer que $u \mapsto uz$ est un plongement (i.e. une immersion injective propre) de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^3$.

2– On définit une application $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par $\pi(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z_2})$. Montrer que cette application est $\mathcal{C}^\infty$ et à valeurs dans la sphère $\mathbb{S}^2$. Montrer que c'est une submersion quand elle est considérée à valeurs dans $\mathbb{S}^2$. Quelles sont les fibres de cette application ?

3– Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{S}^2$, il existe un voisinage U de z et un difféomorphisme ψ entre $U \times \mathbb{S}^1$ et $\pi^{-1}(U)$ tel que $\pi \circ \psi : U \times \mathbb{S}^1 \to U$ est la première projection.

On dit que π est un *fibré localement trivial de fibre* $\mathbb{S}^1$.

4. Théorème de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \to N$ une submersion surjective entre sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que pour tout champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ Y sur N, il existe un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ X sur M tel que

$$\forall x \in M, d_x f(X(x)) = Y(f(x)).$$

Notons $\varphi_{X,t}$ et $\varphi_{Y,t}$ les flots locaux de X et Y. En déduire que pour tout $x_0 \in X$, si (x,t) est assez proche de $(x_0, 0)$,

$$f \circ \varphi_{X,t}(x) = \varphi_{Y,t} \circ f(x).$$

2– Soit $y_0 \in N$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $T_{y_0}N$. Montrer qu'il existe des champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ $Y_1, \ldots, Y_n$ sur N tels que $Y_i(y_0) = e_i$. Si $\varphi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i, montrer que l'application

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \varphi_{Y_1,t_1} \circ \ldots \circ \varphi_{Y_n,t_n}(y_0)$$

est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de y_0 dans N.

3– Supposons f propre. Soit $y_0 \in N$ et notons $F = f^{-1}(y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de y_0 dans N et un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\psi : U \times F \to f^{-1}(U)$ tel que $f \circ \psi(y,x) = y$ pour $(y,x) \in U \times F$.

On dit alors que f est une *fibration*.