Géométrie Différentielle, TD 4 du 9 mars 2015

Dans ce TD et les suivants, on pourra librement utiliser l'existence de partitions de l'unité sur une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, et soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M. Une* partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$ *est la donnée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs positives, $(\varphi_i)_{i\in I}$, telles que*
- *φ_i est à support dans U_i ;*
- *Pour tout x dans M, il existe un voisinage V de x dans M telles que toutes les fonctions φ_i sont nulles sur V, sauf un nombre fini ;*
- *$\sum_i \varphi_i = 1$, la somme étant finie en tout point, d'après le point précédent.*

Théorème 2. *Pour toute sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ et tout recouvrement ouvert de M, il existe une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.*

1. Équation globale d'une sous-variété

Soit N une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^n$.

1– Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un voisinage U_x de x dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $F_x : U_x \to \mathbb{R}^+$ telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

2– Montrer qu'il existe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $N = F^{-1}(0)$.

Solution :

1– Soit $x \in N$. Par définition d'une sous-variété comme lieu des zéros d'une submersion, on peut trouver un voisinage U_x de x dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion $G_x : U_x \to \mathbb{R}^k$ tels que $U_x \cap N = G_x^{-1}(0)$. Posons $F_x = \sum_{i=1}^k G_{x,i}^2$. C'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive sur U_x telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

Soit $x \notin N$. Comme N est fermé, on peut choisir un voisinage U_x de x ne rencontrant pas N. On note $F_x : U_x \to \mathbb{R}$ la fonction constante égale à 1 : on a encore $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

2– Soit $(U_x)_{x\in\mathbb{R}^k}$ le recouvrement ouvert donné par la question précédente. Soit $(\chi_x)_{x\in\mathbb{R}^k}$ une partition de l'unité adaptée à $(U_x)_{x\in\mathbb{R}^k}$. On pose $F = \sum_{x\in\mathbb{R}^k} \chi_x F_x$. C'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur M (car la somme est localement finie) ; on vérifie aisément que $N = F^{-1}(0)$.

En effet, soit y dans N et soit x_0 un point tel que $\chi_{x_0}(y) \neq 0$. Alors, $y \in U_{x_0}$ et $F_{x_0}(y)$, qui est bien défini, est nécessairement nul. Donc, $F(y)$ est nul. Réciproquement, si $F(y)$ est nul, on considère I l'ensemble des x tels que $\chi_x(y) \neq 0$, de sorte que $F(y) = \sum_{x\in I} \chi_x(y) F_x(y)$. Nécessairement, $y \in U_x$, donc $F_x(y)$ est bien défini et doit être nul. Par construction de U_x, y est alors dans $N \cap U_x$, pour n'importe quel $x \in I$; un seul aurait suffi.

2. Restriction de fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de X dans $\mathbb{R}$. On dit que f est $\mathcal{C}^\infty$ si, pour tout x dans X, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction lisse $g : U \to \mathbb{R}$ telle que f et g coïncident sur $X \cap U$.

1– Montrer que cette définition est équivalente à la définition par paramétrisations dans le cas où X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2– Si X est une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^n$, montrer que toute application $\mathcal{C}^\infty$ sur X est restriction d'une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

3– Le point précédent reste-t-il vrai pour une sous-variété quelconque ?

Solution :

1– Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ au sens des paramétrisations. Donc, pour tout x_0 de X, il existe U un ouvert de X dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ une immersion qui est un homéomorphisme sur son image U ; V est ici un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et on peut supposer que $\varphi(0) = x_0$. Par le théorème de forme normale des immersions, il existe ψ un difféomorphisme de W dans T, où W est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, T un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\psi \circ \varphi(y) = (y, 0)$, pour tout y dans V (quitte à réduire U et V). Notons π la projection sur le premier facteur pour la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$. On définit $\widetilde{f} = f \circ \psi^{-1} \circ \pi \circ \psi$. Ceci est bien défini sur W, à condition que T soit stable par π, ce qu'on peut supposer quitte à réduire T et W ; il s'agit en effet de remarquer que ψ envoie $U \cap W$ sur $\mathbb{R}^k \times \{0\}\ subset \mathbb{R}^n$. Par le même argument, $\widetilde{f}$ coïncide avec f sur $U \cap W$ (il n'y a plus de projection π à faire) donc on obtient le prolongement désiré.

Réciproquement, si φ est une paramétrisation locale de X, et si $f : X \to \mathbb{R}$ est localement restriction d'une fonction $\widetilde{f}$, alors $f \circ \varphi$ est lisse, car elle coïncide avec l'application $\widetilde{f} \circ \varphi$ qui est lisse par composition. Donc, f est bien lisse au sens des paramétrisations.

2– Notons $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de $\mathbb{R}^n$ par des ouverts vérifiant les conditions suivantes : $U_0 = \mathbb{R}^n - F$, pour $i \geqslant 1$, on a sur chaque U_i une application f_i lisse qui coïncide avec f sur $U_i \cap F$. On considère une partition de l'unité (φ_i) subordonnée à ce recouvrement : chaque φ_i est une fonction lisse à valeurs dans $[0, 1]$ de support inclus dans U_i. De plus, $\sum \varphi_i = 1$ (la somme étant localement finie). On pose $g = \sum \varphi_i f_i$, avec $f_0 = 0$; c'est une application lisse qui prolonge f.

3– Non, c'est faux. Par exemple, on ne peut pas prolonger à $\mathbb{R}$ la fonction lisse $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ définie sur $]-1, 1[$.

3. Fibration de Hopf

1– On identifie $\mathbb{S}^3$ avec la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. On définit alors une action de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{S}^3$ par $u.(z_1, z_2) = (uz_1, uz_2)$ pour $u \in \mathbb{S}^1$. Pour tout $z = (z_1, z_2)$, montrer que $u \mapsto uz$ est un plongement (i.e. une immersion injective propre) de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^3$.

2– On définit une application $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par $\pi(z_1, z_2) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z_2})$. Montrer que cette application est $\mathcal{C}^\infty$ et à valeurs dans la sphère $\mathbb{S}^2$. Montrer que c'est une submersion quand elle est considérée à valeurs dans $\mathbb{S}^2$. Quelles sont les fibres de cette application ?

3– Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{S}^2$, il existe un voisinage U de z et un difféomorphisme ψ entre $U \times \mathbb{S}^1$ et $\pi^{-1}(U)$ tel que $\pi \circ \psi : U \times \mathbb{S}^1 \to U$ est la première projection.

On dit que π est un *fibré localement trivial de fibre* $\mathbb{S}^1$.

Solution :

1– Cette fonction est injective (au moins un des z_1, z_2 est non nul), immersive (pour la même raison, car sa différentielle en u est $h \mapsto (hz_1, hz_2)$ et propre ($\mathbb{S}^1$ est compact). C'est donc un plongement.

2– Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ est clair, car l'application donnée est restriction de l'application donnée par la même formule et définie sur $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Elle est à valeurs dans $\mathbb{S}^2$ par un calcul immédiat. Pour montrer que c'est une submersion, on considère plutôt la même application définie sur $\mathbb{R}^4$. En coordonnées réelles, on a donc

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, 2(x_1x_3 + x_2x_4), 2(x_2x_3 - x_1x_4)).$$

Sa différentielle en (x_1, x_2, x_3, x_4) est donnée (à un facteur 2 près) par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4 & x_3 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$$

Le premier mineur $(3,3)$ vaut $-x_3 \sum x_i^2$, donc est non nul dès que x_3 est non nul. Les autres mineurs donnent des conditions analogues avec x_1, x_2, x_4. Donc la différentielle est surjective dès que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0,0,0,0)$.

Revenant à l'application définie de $\mathbb{S}^3$ dans $\mathbb{S}^2$, ce sera nécessairement une submersion (on utilise le fait que si $f : V \to W$ est une application linéaire de rang k et si $X \subset V$ est un sous-espace linéaire de V de codimension i, alors le rang de $f_{|X}$ est au moins $k - i$).

Par ailleurs, on montre aisément que les fibres de l'application sont exactement les orbites de l'action de $\mathbb{S}^1$.

3– Par la question précédente, $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ est une submersion. Soit $z \in \mathbb{S}^2$. Alors il existe U voisinage ouvert de z dans $\mathbb{S}^2$ et $s : U \to \mathbb{S}^3$ tels que $\pi \circ s$ est l'identité de U (une submersion admet des sections locales). Considérons alors l'application ψ

$$\psi(z, u) := u.s(z),$$

définie de $U \times \mathbb{S}^1$ et à valeurs dans $\pi^{-1}(U)$. Par les questions précédentes, ψ est bien définie, $\mathcal{C}^\infty$ et bijective. Montrons que sa réciproque est lisse.

On écrit $w \in \pi^{-1}(U)$ sous la forme $w = (w_1, w_2)$ et on suppose par symétrie que $w_1 \neq 0$. Alors, $\psi^{-1}(w)$ est donné par $(\pi(w), u(w))$ où $u(w) \in \mathbb{S}^1$ est tel que $u(w).(s \circ \pi(w)) = w$. Par définition de l'action de $\mathbb{S}^1$, $u(w)$ vérifie $u(w) \times \mathrm{pr}_1(s \circ \pi(w)) = w_1$, où $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ est la projection sur le premier facteur. Donc $u(w)$ est donné par

$$u(w) = \frac{w_1}{\mathrm{pr}_1(s \circ \pi(w))},$$

ce qui prouve le caractère $\mathcal{C}^\infty$.

Donc, ψ est bien un difféomorphisme et il vérifie bien que $\pi \circ \psi(z, u) = z$ car $\pi \circ \psi(z, u) = \pi(u.s(z)) = \pi \circ s(z) = z$, s étant une section.

4. Théorème de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \to N$ une submersion surjective entre sous-variétés $\mathcal{C}^\infty$ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que pour tout champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ Y sur N, il existe un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ X sur M tel que

$$\forall x \in M, d_x f(X(x)) = Y(f(x)).$$

Notons $\varphi_{X,t}$ et $\varphi_{Y,t}$ les flots locaux de X et Y. En déduire que pour tout $x_0 \in X$, si (x, t) est assez proche de $(x_0, 0)$,

$$f \circ \varphi_{X,t}(x) = \varphi_{Y,t} \circ f(x).$$

2– Soit $y_0 \in N$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $T_{y_0}N$. Montrer qu'il existe des champs de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ $Y_1, \ldots, Y_n$ sur N tels que $Y_i(y_0) = e_i$. Si $\varphi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i, montrer que l'application

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \varphi_{Y_1,t_1} \circ \ldots \circ \varphi_{Y_n,t_n}(y_0)$$

est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de y_0 dans N.

3– Supposons f propre. Soit $y_0 \in N$ et notons $F = f^{-1}(y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de y_0 dans N et un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme $\psi : U \times F \to f^{-1}(U)$ tel que $f \circ \psi(y, x) = y$ pour $(y, x) \in U \times F$.

On dit alors que f est une *fibration.*

Solution :

Voir la correction de l'exercice 88 dans le polycopié de F. Paulin.