

Feuille d'exercices n°4

Corrigé

Exercice 0

Soient α, β des multi-indices quelconques. Il faut montrer qu'il existe $D > 0$ telle que :

$$\forall x, \xi \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq D(1 + \|\xi\|)^{k-|\beta|}$$

Par hypothèse, cette propriété est vraie pour $\|\xi\| \geq R$, avec R dépendant de α et β . Il suffit de montrer qu'elle est aussi vraie si $\|\xi\| < R$.

Comme $(1 + \|\xi\|)^{k-|\beta|}$ est minorée sur $B(0, R)$, il est suffisant de montrer qu'il existe une constante D' vérifiant :

$$\forall x, \xi \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq D' \quad \text{si } \|\xi\| < R$$

Cette propriété est vraie puisque, lorsque $\|\xi\| < R$, comme $a \in S_{\rho,0}^m$:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq D''(1 + \|\xi\|)^{m-\rho|\beta|} \leq D'' \max(1, (1 + R)^{m-\rho|\beta|})$$

Exercice 1

1. Soit $M > 0$ tel que $\chi = 0$ en-dehors de $B(0, M)$. Soit $M' > 0$ tel que $\chi = 1$ sur $B(0, M')$.

Soit j fixé.

Pour tous α, β :

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j &= \partial_\xi^\beta [(1 - \chi(\epsilon_j \xi)) \partial_x^\alpha a_j] \\ &= \sum_{\gamma \leq \beta} n_\gamma \partial_\xi^\gamma [1 - \chi(\epsilon_j \xi)] (\partial_\xi^{\beta-\gamma} \partial_x^\alpha a_j) \end{aligned}$$

où les n_γ sont des entiers.

Pour tout multi-indice $\gamma \neq 0$:

$$\partial_\xi^\gamma [1 - \chi(\epsilon_j \xi)] = -\epsilon_j^{|\gamma|} (\partial^\gamma \chi)(\epsilon_j \xi)$$

ce qui entraîne, pour $\epsilon_j < M$:

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\gamma [1 - \chi(\epsilon_j \xi)]| &\leq \epsilon_j^{|\gamma|} \mathbf{1}_{B(0, M/\epsilon_j)}(\xi) \|\partial^\gamma \chi\|_\infty \\ &\leq \epsilon_j^{|\gamma|} \|\partial^\gamma \chi\|_\infty \left(\frac{1 + \|\xi\|}{1 + M/\epsilon_j} \right)^{-|\gamma|+1} \\ &\leq \epsilon_j^{|\gamma|} \|\partial^\gamma \chi\|_\infty \left(\frac{1 + \|\xi\|}{2M\epsilon_j} \right)^{-|\gamma|+1} \\ &\leq \epsilon_j^{|\gamma|} (2M)^{|\gamma|-1} \|\partial^\gamma \chi\|_\infty (1 + \|\xi\|)^{-|\gamma|+1} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} |1 - \chi(\epsilon_j \xi)| &\leq (1 + \|\chi\|_\infty) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n - B(0, M'/\epsilon_j)}(\xi) \\ &\leq (1 + \|\chi\|_\infty)(1 + \|\xi\|) \left(\frac{\epsilon_j}{M'} \right) \end{aligned}$$

Donc, en utilisant le fait que, pour tous γ et β , il existe une constante D telle que $|\partial_\xi^{\beta-\gamma} \partial_x^\alpha a_j| \leq D(1 + \|\xi\|)^{m_j - |\beta| + |\gamma|}$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j| &\leq n_0 |1 - \chi(\epsilon_j \xi)| (\partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha a_j) + \epsilon_j \sum_{0 \neq \gamma \leq \beta} n_\gamma C_\gamma (1 + \|\xi\|)^{-|\gamma|+1} |\partial_\xi^{\beta-\gamma} \partial_x^\alpha a_j| \\ &\leq \epsilon_j C (1 + \|\xi\|)^{m_j - |\beta| + 1} \end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de ϵ_j (mais dépendant de α et β).

En prenant ϵ_j assez petit, on peut donc avoir, pour tous α, β tels que $|\alpha| \leq j, |\beta| \leq j$:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j| \leq \frac{1}{2^j} (1 + \|\xi\|)^{1+m_j - |\beta|}$$

Si, pour tout j , on choisit ϵ_j de cette manière, alors, pour tous α, β , la propriété voulue est bien vérifiée dès que $j \geq \max(|\alpha|, |\beta|)$.

2. D'après la question 1., pour tous α, β , la série $\sum_{j \in \mathbb{N}} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j$ converge uniformément sur tout compact.

3. Montrons d'abord que, pour tout k , $\sum_{j \geq k} \tilde{a}_j \in S^{m_k}$.

Pour tout $j \geq k$, \tilde{a}_j et a_j coïncident en-dehors d'un certain compact donc, puisque $a_j \in S^{m_j}$, \tilde{a}_j aussi (d'après l'exercice 0). Comme $m_j \leq m_k$, cela entraîne en particulier $a_j \in S^{m_k}$.

Soient α, β quelconques. Soit J assez grand pour que la propriété de la question 1. soit vérifiée si $j \geq J$ (pour les α et β fixés).

La fonction $\sum_{k \leq j < J} \tilde{a}_j$ est un symbole de S^{m_k} donc $\sum_{k \leq j < J} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j$ décroît au pire en $(1 + \|\xi\|)^{m_k - |\beta|}$.

Montrons qu'on obtient la même décroissance pour $\sum_{j \geq J} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \geq J} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j \right| &\leq \sum_{j \geq J} \frac{1}{2^j} (1 + \|\xi\|)^{1+m_j - |\beta|} \\ &\leq \sum_{j \geq J} \frac{1}{2^j} (1 + \|\xi\|)^{1+m_{k+1} - |\beta|} \\ &= \frac{1}{2^{J-1}} (1 + \|\xi\|)^{1+m_{k+1} - |\beta|} \\ &\leq \frac{1}{2^{J-1}} (1 + \|\xi\|)^{m_k - |\beta|} \end{aligned}$$

Les deux remarques précédentes impliquent que, pour une constante C assez grande :

$$\left| \sum_{j \geq k} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}_j \right| \leq C (1 + \|\xi\|)^{m_k - |\beta|}$$

Comme ceci est vrai pour α et β quelconques, on en déduit que $\sum_{j \geq k} \tilde{a}_j$ est un élément de S^{m_k} . On conclut en remarquant que $\sum_{j < k} (\tilde{a}_j - a_j)$ est un symbole de S^{m_0} dont le support est compact en ξ . C'est donc, d'après l'exercice 0, un symbole de $S^{-\infty}$. Ainsi, $a - \sum_{j < k} a_j$ est la somme d'un symbole de $S^{-\infty}$ et d'un symbole de S^{m_k} . C'est alors un élément de S^{m_k} .

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} \text{Op}(b) - \text{Op}(b') &= \text{Op}(b')\text{Op}(a)\text{Op}(b) - (\text{Op}(b')\text{Op}(a) - \text{Id})\text{Op}(b) \\ &\quad - \text{Op}(b')\text{Op}(a)\text{Op}(b) + \text{Op}(b')(\text{Op}(a)\text{Op}(b) - \text{Id}) \\ &= \text{Op}(b')(\text{Op}(a)\text{Op}(b) - \text{Id}) - (\text{Op}(b')\text{Op}(a) - \text{Id})\text{Op}(b) \\ &\in S^{-\infty} + S^{-\infty} = S^{-\infty} \end{aligned}$$

2. On sait que :

$$\begin{aligned} \text{Op}(a)\text{Op}(b) - \text{Id} &= \text{Op}(ab) - \text{Id} + \text{reste dans } S^{-1} \\ &= \text{Op}(ab - 1) + \text{reste dans } S^{-1} \end{aligned}$$

Puisque $\text{Op}(a)\text{Op}(b) - \text{Id} \in \text{Op}(S^{-\infty})$, cela entraîne que $\text{Op}(ab - 1)$ appartient à S^{-1} . En particulier, il existe A tel que, pour tout (x, ξ) :

$$\begin{aligned} |a(x, \xi)b(x, \xi) - 1| &\leq A(1 + \|\xi\|)^{-1} \\ \Rightarrow |a(x, \xi)b(x, \xi)| &\geq 1/2 \text{ si } \|\xi\| \text{ est assez grand} \end{aligned}$$

De plus, puisque $b \in S^{-m}$, il existe B tel que, pour tout (x, ξ) :

$$\begin{aligned} |b(x, \xi)| &\leq B(1 + \|\xi\|)^{-m} \\ \Rightarrow |a(x, \xi)| &\geq \frac{1}{2}|b(x, \xi)|^{-1} \geq \frac{1}{2B}(1 + \|\xi\|)^m \text{ si } \|\xi\| \text{ est assez grand} \end{aligned}$$

3. Il suffit de montrer que $F(a(x, \xi)(1 + \|\xi\|^2)^{-m/2})$ appartient à S^0 .

Notons $\tilde{a} = a(x, \xi)(1 + \|\xi\|^2)^{-m/2}$. C'est un symbole de S^0 qui vérifie, dès que $\|\xi\|$ est assez grand :

$$|\tilde{a}(x, \xi)| \geq C$$

Soient α, β des multi-indices quelconques. Dès que $\|\xi\|$ est assez grand, on a $F \circ \tilde{a} = \frac{1}{\tilde{a}}$, donc $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (F \circ \tilde{a})$ est (pour ξ assez grand) une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$\frac{\prod_{j=1}^s \partial_x^{\gamma_j} \partial_\xi^{\delta_j} \tilde{a}(x, \xi)}{\tilde{a}(x, \xi)^{|\alpha|+|\beta|+1}} \quad \text{avec } \gamma_1 + \dots + \gamma_s = \alpha \text{ et } \delta_1 + \dots + \delta_s = \beta$$

Puisque $|\tilde{a}|$ est minoré et puisque $\tilde{a} \in S^0$, chacune de ces fonctions décroît au pire en $(1 + \|\xi\|)^{-|\beta|}$. Donc, pour tout ξ tel que $\|\xi\|$ est assez grand :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (F \circ \tilde{a})(x, \xi)| \leq C(1 + \|\xi\|)^{-|\beta|}$$

De plus, $F \circ \tilde{a}$ est une fonction bornée dont toutes les dérivées sont bornées (c'est une composition de fonctions bornées dont toutes les dérivées sont bornées). C'est donc un symbole de $S_{0,0}^0$. Par l'exercice 0, cela entraîne que $F \circ \tilde{a}$ est un symbole de S^0 .

On a montré $b \in S^{-m}$. Montrons maintenant qu'on peut écrire $\text{Op}(a)\text{Op}(b) = \text{Id} - R$ avec $R \in \text{Op}(S^{-1})$.

On sait que $\text{Op}(a)\text{Op}(b) = \text{Op}(ab) + S$ avec $S \in \text{Op}(S^{-1})$. Or $a(x, \xi)b(x, \xi) = 1$ si $\|\xi\|$ est assez grand. Donc $ab - 1$ est un symbole dont le support est compact en ξ . D'après l'exercice 0, c'est un élément de $S^{-\infty}$. Donc $\text{Op}(a)\text{Op}(b) = \text{Op}(1) + \text{Op}(ab - 1) + S = \text{Id} + \text{Op}(ab - 1) + S$. C'est bien de la forme $\text{Id} - R$ où $R = -\text{Op}(ab - 1) - S \in S^{-1} + S^{-\infty} = S^{-1}$.

4. Pour tout $k \geq 0$, soit $r_k \in S^{-k}$ le symbole associé à R^k .

Soit $g \in S^0 \sim \sum_{k \geq 0} r_k$. Un tel symbole existe d'après l'exercice 1.

On pose $B = \text{Op}(b)\text{Op}(g) \in \text{Op}(S^{-m})$. Pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, par définition de g , $g = r_0 + \dots + r_K + s$ avec $s \in S^{-(K+1)}$ donc :

$$\begin{aligned} \text{Op}(a)B &= \text{Op}(a)\text{Op}(b)(\text{Id} + R + \dots + R^K + \text{Op}(s)) \\ &= (\text{Id} - R)(\text{Id} + R + \dots + R^K + \text{Op}(s)) \\ &= \text{Id} - R^{K+1} + (\text{Id} - R)\text{Op}(s) \\ &= \text{Id} - T \end{aligned}$$

avec $T \in \text{Op}(S^{-(K+1)})$.

Puisque c'est vrai pour tout k , $\text{Op}(a)B - \text{Id} \in \text{Op}(S^{-\infty})$.

La construction de l'inverse à gauche est identique. En effet, on a aussi $\text{Op}(b)\text{Op}(a) = \text{Id} - R$ avec $R \in \text{Op}(S^{-1})$ (pour un R éventuellement différent de celui de la question 3.). En définissant g comme précédemment, on a, pour la même raison, $\text{Op}(g)\text{Op}(b)\text{Op}(a) - \text{Id} \in \text{Op}(S^{-\infty})$.

Exercice 3

1. Soit $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; 1]$ une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact qui vaut 1 au voisinage de 0.

Pour tout k , on pose $u_k(x) = u(x)(1 - \chi(2^k(x - x_0)))$. On a bien $u_k(x_0) = 0$ au voisinage de x_0 et $\|u_k - u\|_2 \rightarrow 0$ puisque :

$$\begin{aligned} \|u_k - u\|_2 &= \|u\chi(2^k(\cdot - x_0))\|_2 \\ &\leq \|u|_{2^{-k}\text{Supp}(\chi)+x_0}\|_2 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Comme P est local, $P(u_k)(x_0) = 0$ pour tout k .

De plus, P est un opérateur continu de L^2 vers H^{-m} donc, d'après l'indication, P est un opérateur continu de L^2 vers $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$. En particulier, la suite $(P(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $P(u)$ dans $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$. Donc :

$$P(u)(x_0) = \lim_k P(u_k)(x_0) = 0$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, P^k est un opérateur local d'ordre km . Pour tout k assez grand, on a $km < -n/2$ et donc, par la question 1., $P^k = 0$.

D'après la question 3.c) de l'exercice 4, cela entraîne que P est dans $\text{Op}(S^{-\infty})$. Donc, d'après la question 1., puisque P est local, $P = 0$.

3. a) De façon générale, une distribution à support au voisinage de x_0 est une somme finie de $\delta^{(i)}$.

b) De même qu'à la question 1., $u \rightarrow Pu$ est une application continue de $H^{n/2+k}$ vers $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, puisque P envoie continûment $H^{n/2+k}$ vers $H^{n/2+k-m}$, ce qui s'injecte vers $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Donc $u \in H^{n/2+k} \rightarrow Pu(x_0) \in \mathbb{C}$ est une application continue. Le lemme qui suit permet de conclure.

Lemme 3.1. *Soit A un ensemble fini de multi-indices. Pour tout $i \in A$, on suppose $a_i \in \mathbb{C}$ fixé. Si l'application $G : u \in H^{n/2+k} \rightarrow \sum_i a_i \delta^{(i)} u \in \mathbb{C}$ est continue, alors $a_i = 0$ pour tout i tel que $|i| > k$.*

Démonstration. On peut supposer $x_0 = 0$. Soit $M = \max\{|i|, a_i \neq 0\}$.

Soit $u \in H^{n/2+k}$ tel que $\sum_{|i|=M} a_i \delta^{(i)} u \neq 0$. Pour tout $\lambda \geq 1$, on pose $u_\lambda : x \rightarrow u(\lambda x)$.

On vérifie qu'il existe une constante $C_u > 0$ telle que $\|u_\lambda\|_{H^{n/2+k}} \sim \lambda^k C_u$ pour $\lambda \rightarrow +\infty$.

D'autre part, $G(u_\lambda) \sim \lambda^M D_u$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, où $D_u = \sum_{|i|=M} a_i \delta^{(i)} u$.

On doit donc avoir, puisque G est continue sur $H^{n/2+k}$, $M \leq k$. □

c) D'après les questions précédentes, on a $P = \sum_{|\alpha| \leq K} a_\alpha(x) D^\alpha$ pour un certain $K \in \mathbb{N}^*$ et des fonctions a_α .

Il faut montrer que les a_α sont \mathcal{C}^∞ et que $K \leq k - 1$.

Si u est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 sur un ouvert borné Ω , on a, pour tout $x \in \Omega$, $Pu(x) = a_0(x)$. Comme Pu est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cela entraîne que a_0 est \mathcal{C}^∞ sur Ω . Comme Ω peut être quelconque, a_0 est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n .

On procède ensuite par récurrence pour montrer que les a_α sont \mathcal{C}^∞ . En effet, si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec x^α , $|\alpha| \geq 1$ sur un ouvert borné Ω , on a, pour tout $x \in \Omega$:

$$Pu(x) = a_\alpha(x) + \sum_{\beta < \alpha} a_\beta(x) (D^\beta u)(x)$$

donc a_α est \mathcal{C}^∞ sur Ω si les a_β le sont pour tout $\beta < \alpha$. Comme Ω est quelconque, a_α est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n .

Cela montre que les a_α sont \mathcal{C}^∞ . Le symbole associé à P est $(x, \xi) \rightarrow a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$. Ce symbole ne peut être d'ordre m que si $|\alpha| \leq m < k$ pour tout α vérifiant $a_\alpha \neq 0$. Donc $a_\alpha = 0$ si $|\alpha| > k - 1$.

Exercice 4

1. Supposons d'abord $a \in S^m$ et montrons que la propriété 2. est vérifiée. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Pour alléger les notations, on suppose $\beta = 0$ (pour traiter le cas $\beta \neq 0$, il suffira d'appliquer à $\partial_x^\beta a$ le résultat pour $\beta = 0$).

La fonction $\partial_\xi^\alpha a_\lambda$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\lambda^{|\alpha-\gamma|} \partial^\gamma \chi(\xi) \partial_\xi^{\alpha-\gamma} a(x, \lambda\xi)$, avec $\gamma \leq \alpha$. Puisque $a \in S^m$, il existe des constantes D_γ telles que ces termes sont majorés par :

$$\begin{aligned} D_\gamma \lambda^{|\alpha-\gamma|} (1 + \lambda \|\xi\|)^{m-|\alpha-\gamma|} 1_{\text{Supp}(\chi)}(\xi) &\leq D_\gamma \lambda^{|\alpha-\gamma|} \max((1 + \lambda/2)^{m-|\alpha-\gamma|}, (1 + 2\lambda)^{m-|\alpha-\gamma|}) \\ &\leq \tilde{D}_\gamma \lambda^m \end{aligned}$$

donc la propriété 2. est vérifiée.

Supposons maintenant 2. vérifiée et montrons que a est dans S^m . Soit β fixé. On va montrer par récurrence sur k que, si $|\alpha| \leq k$, alors :

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)\| \leq C(1 + \|\xi\|)^{m-|\alpha|}$$

pour une certaine constante C .

Pour $k = 0$, c'est vrai. En effet, si $\|\xi\| \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\partial_x^\beta a(x, \xi)| &= (\chi(\xi/\|\xi\|))^{-1} |\partial_x^\beta a_{\|\xi\|}(x, \xi/\|\xi\|)| \\ &\leq \left(\inf_{\|\xi\|=1} \chi(\xi)\right)^{-1} |\partial_x^\beta a_{\|\xi\|}(x, \xi/\|\xi\|)| \\ &\leq \left(\inf_{\|\xi\|=1} \chi(\xi)\right)^{-1} C_0 \|\xi\|^m \\ &\leq D_0(1 + \|\xi\|)^m \end{aligned}$$

Supposons que c'est vrai pour k . Soit α tel que $|\alpha| = k + 1$. Alors $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda$ est une somme de fonctions de la forme $\lambda^{|\alpha-\gamma|} \partial^\gamma \chi(\xi) \partial_\xi^{\alpha-\gamma} \partial_x^\beta a(x, \lambda\xi)$, avec $\gamma \leq \alpha$.

Pour tout $\gamma > 0$, par l'hypothèse de récurrence et en raisonnant comme dans le début de la question, ce terme est majoré par $C\lambda^m$ pour une certaine constante C .

Donc $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda(x, \xi) = \lambda^{k+1} \chi(\xi) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \lambda\xi) + O(\lambda^m)$. En utilisant la propriété 2., cela implique :

$$\chi(\xi) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \lambda\xi) = O(\lambda^{m-(k+1)})$$

Donc, pour tout ξ tel que $\|\xi\| \geq 1$, en raisonnant comme dans le cas $k = 0$:

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \|\xi\|\xi/\|\xi\|) = O(\|\xi\|^{m-(k+1)})$$

ce qui démontre l'hypothèse de récurrence au rang $k + 1$.

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\left\| f(x+h) - \sum_{|\alpha| < k} h^\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x) \right\| \leq C_h \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

où les constantes c_α sont données par la formule de Taylor et C_h est une constante qui dépend de h .

Donc :

$$\left\| \sum_{|\alpha| < k} h^\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x) \right\| \leq \|f\|_\infty + C_h \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

Si on fixe h_1, \dots, h_K indépendamment de f , tels que $L : (a_\alpha)_{|\alpha| < k} \rightarrow (\sum_{|\alpha| < k} h_j^\alpha c_\alpha a_\alpha)_{j \leq K}$ est inversible, on a, pour tout x :

$$\|L((\partial^\alpha f(x))_{|\alpha| < k})\|_\infty \leq \|f\|_\infty + C_h \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ce qui entraîne, en utilisant la continuité de L^{-1} , que, pour tout α vérifiant $|\alpha| < k$:

$$\|\partial^\alpha f(x)\| \leq D \left(\|f\|_\infty + \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \right)$$

pour une constante D indépendante de f .

b) Posons $g : x \rightarrow f(\lambda x)$, pour un $\lambda > 0$ à choisir plus tard. Soit β fixé.

Alors :

$$\begin{aligned} \lambda^{|\beta|} \|\partial^\beta f\|_\infty &= \|\partial^\beta g\|_\infty \\ &\leq C \left(\|g\|_\infty + \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha g\|_\infty \right) \\ &\leq C \left(\|f\|_\infty + \lambda^k \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne que, pour tout $\lambda > 0$:

$$\|\partial^\beta f\|_\infty \leq C \left(\lambda^{-|\beta|} \|f\|_\infty + \lambda^{k-|\beta|} \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \right)$$

Pour $\lambda = \|f\|_\infty^{1/k} \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty \right)^{-1/k}$, on obtient le résultat voulu.

c) Soit $\epsilon > 0$ fixé

D'après la question 1., pour tous α, β , il existe C tel que :

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda\|_\infty \leq C \lambda^m$$

De plus, $\|a_\lambda\| \leq C \lambda^\mu$ pour une certaine constante μ .

Pour tous $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, en utilisant ces remarques et la question b), on a, si on note $|\alpha| + |\beta| = k_1$ et $|\alpha'| + |\beta'| = k_2$:

$$\begin{aligned} \|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda\|_\infty &\leq C \|\partial_\xi^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} a_\lambda\|_\infty^{1-k_1/k_2} \left(\sum_{|\gamma|=k_2} \|\partial^\gamma a_\lambda\|_\infty \right)^{k_1/k_2} \\ &\leq \tilde{C} (\lambda^\mu)^{1-k_1/k_2} (\lambda^m)^{k_1/k_2} \\ &= \tilde{C} \lambda^{\mu+(m-\mu)k_1/k_2} \end{aligned}$$

Si on prend k_2 assez grand pour que $\mu + (m - \mu)k_1/k_2 \leq \mu + \epsilon$, on obtient :

$$\|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_\lambda\|_\infty = O(\lambda^{\mu+\epsilon})$$

D'après la question 1., cela implique $a \in S^{\mu+\epsilon}$.

3. a) Supposons par l'absurde que $A \in \text{Op}(S^m)$ mais $A \notin \text{Op}(S^{m-1/2k})$.

Soit $a \in S^m$ le symbole de A . D'après les résultats vus en cours sur le calcul symbolique, $A^k = \text{Op}(a^k) + R$ avec $R \in \text{Op}(S^{km-1})$.

Comme $A^k = 0$, on doit avoir $a^k \in S^{km-1}$, ce qui implique en particulier :

$$|a(x, \xi)|^k \leq C(1 + \|\xi\|)^{km-1} \iff |a(x, \xi)| \leq C^{1/k}(1 + \|\xi\|)^{m-1/k}$$

D'après la question 2.c), a appartient donc à $S^{m-1/k+\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$. En particulier, $a \in S^{m-1/2k}$. C'est absurde.

b) Soient χ une fonction non-nulle à support dans $[0; 1]$ et ψ une fonction non-nulle à support dans $[1; 2]$ telle que $\psi(3/2) \neq 0$. Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi \star g(3/2) \neq 0$. L'opérateur $A : u \rightarrow \psi((u\chi) \star g)$ est un opérateur pseudo-différentiel.

Il est nilpotent : pour toute u , $\chi(Au) = 0$ puisque $\chi\psi = 0$. Donc $A^2u = 0$.

De plus, il n'est pas trivial. En effet, si u vaut 1 sur $[0; 1]$, $Au = \psi(\chi \star g)$, ce qui est non-nul en $3/2$.