Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2018-2019 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 4 : Vous reprendrez bien du brownien ?

Mercredi 3 Octobre

Exercice 1 (Le mouvement brownien n'est pas à variation finie)
Soit B un mouvement brownien, et soient $0 \leq a < b$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(B_{a+(k+1)(b-a)2^{-n}} - B_{a+k(b-a)2^{-n}} \right)^2.$$

1. Calculer la moyenne et la variance de X_n.
2. En déduire que X_n converge p.s. vers une limite à préciser.
3. En conclure que p.s., le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial.

Exercice 2 (Loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien)
Soit B un mouvement brownien. Le but de cet exercice est de montrer que presque sûrement :

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1,$$

avec $h(t) = \sqrt{2t \ln \ln t}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $S_t = \sup_{s \in [0,t]} B_s$, et on rappelle (TD3, exo 1) que S_t a la même loi que $|B_t|$. On rappelle également (TD2, exo 3) que $\mathbb{P}\left(B_1 > x\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$ quand $x \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Estimer
$$\mathbb{P}\left(S_{(1+\varepsilon)^n} > (1+\varepsilon) h\left((1+\varepsilon)^n\right) \right)$$
pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire $\limsup_{t \to +\infty} \frac{B_t}{h(t)} \leq 1$ p.s..
3. Soit $r > 1$. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h(r^n)$.
4. En déduire $\limsup_{t \to +\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1$ p.s.. Que peut-on en déduire sur le comportement de B au voisinage de 0 ?

Exercice 3 (À ε près, le mouvement brownien peut tout faire !)

1. Soit $\varepsilon > 0$, et soit B un mouvement brownien. En utilisant la séparabilité de $\mathcal{C}([0,1])$, montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que
$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t - f(t)| \leq \varepsilon\right) > 0.$$
2. En déduire que
$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t| \leq \varepsilon\right) > 0.$$
3. Soit X une gaussienne de variance 1 indépendante de B. Montrer que $(B_t - tB_1 + tX)_{0 \leq t \leq 1}$ est un mouvement brownien. En déduire que pour tout $\alpha > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t - \alpha t| \leq \varepsilon\right) > 0.$$
4. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1)]$, on a
$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t - f(t)| \leq \varepsilon\right) > 0.$$
5. Montrer qu'il existe des constantes $C, c > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(\forall t \in [0,1], |B_t| \leq \varepsilon\right) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon^2}\right).$$

Exercice 4 (Les maxima locaux du mouvement brownien sont distincts)
Soit B un mouvement brownien.

1. Soient $a < b < c < d$ des réels. On pose $M_1 = \max_{[a,b]} B$ et $M_2 = \max_{[c,d]} B$. Montrer que les variables $M_1 - B_b$, $B_c - B_b$ et $M_2 - B_c$ sont indépendantes.
2. Montrer que si X et Y sont deux variables indépendantes et si la loi de X n'a pas d'atome, alors $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
3. En déduire que $M_1 \neq M_2$ p.s. puis que p.s., les maxima locaux de B sont deux à deux distincts.

Exercice 5 Que représente la jolie image ci-dessous ?