TD 5 – Théorèmes de Fubini et changement de variables

1 – Théorèmes de Fubini

Exercice 1. (*Quelque chose d'utile*) Sur un espace mesuré σ-fini $(E,\mathcal{A},\mu)$, on considère $f\colon (E,\mathcal{A},\mu) \to (\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable.

1. Soit $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0)=0$. Montrer que
$$\int_E g\circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty g'(t)\mu(\{f\geq t\})\,\mathrm{d}t.$$
Indication. On pourra écrire $g(f(t))$ comme une intégrale.
2. Montrer que
$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \mu\{f\geq t\}\,\mathrm{d}t.$$
3. On considère à présent $f\colon E\to\mathbb{R}$ mesurable et on suppose que μ est finie et qu'il existe $p>0$ et $c>0$ tels que pour tout $t>0$, $\mu(\{|f|\geq t\})\leq ct^{-p}$. Montrer que $f\in L^q(E,\mathcal{A},\mu)$ pour tout $q\in]0,p[$. A-t-on forcément $f\in L^p(E,\mathcal{A},\mu)$?

Corrigé.

1. La fonction $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g(0)=0$ donc pour tout $x\in E$ on a
$$g(f(x)) = \int_0^{f(x)} g'(s)\,\mathrm{d}s.$$
On a donc
$$\int_E g\circ f\,\mathrm{d}\mu = \int_E\int_0^\infty g'(s)\mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\mu(x).$$
On pose $F\colon (x,s)\in E\times\mathbb{R}_+ \mapsto g'(s)\mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}$ On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli car :
   - ▷ μ et λ sont σ-finies.
   - ▷ $F\colon (E\times\mathbb{R}_+,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. Montrons le proprement pour une fois. Tout d'abord $(x,s)\mapsto g'(s)$ est mesurable, car l'image réciproque de $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par cette fonction est $E\times(g')^{-1}(A)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ car g' est mesurable. Ensuite, remarquons que la fonction $(x,s)\in E\times\mathbb{R}_+\mapsto \mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}$ peut être décomposée en $\psi_2\circ\psi_1$ avec
$$\begin{array}{rccc}\psi_1\colon & (E\times\mathbb{R}_+,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) & \to & (\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \\ & (x,s) & \mapsto & (f(x),s) \\ \psi_2\colon & (\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) & \to & (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ & (t,s) & \mapsto & \mathbb{1}_{s\leq t}\end{array}$$
et il suffit alors de montrer que ces fonctions sont mesurables. Pour ψ_1, comme $\{A\times B : A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, il suffit de montrer, pour $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, que $\psi_1^{-1}(A\times B)\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Mais on a $\psi_1^{-1}(A\times B) = f^{-1}(A)\times B$ donc c'est bon. Pour ψ_2, il suffit de montrer que $\{(t,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ : s\leq t\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$: comme c'est un fermé, il est donc dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+) = \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

▷ F est positive.

On obtient alors

$$\int_E g\circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}_+} g'(s)\int_E \mathbb{1}_{\{s\leq f(x)\}}\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}_+} g'(s)\mu(\{f\geq s\})\,\mathrm{d}s.$$

2. Application immédiate de la question précédente en prenant $g(x)=x$.
3. On applique la question 1. avec $|f|$ et $g(x)=x^q$:

$$\int_E |f|^q\,\mathrm{d}\mu = q\int_0^\infty t^{q-1}\mu(\{|f|\geq t\})\,\mathrm{d}t \leq q\mu(E)\int_0^1 t^{q-1}\,\mathrm{d}t + cq\int_1^\infty t^{q-p-1}\,\mathrm{d}t<\infty,$$

car $q-1>0$ et $q-p-1<-1$.

En revanche, on n'a pas forcément $f\in L^p(E,\mathcal{A},\mu)$: prendre par exemple $f=t^{-1/p}$ sur $]0,1]$.

Remarque. Réciproquement, si $f\in L^p(E,\mathcal{A},\mu)$, l'inégalité de Markov implique qu'il existe $c>0$ tel que pour tout $t>0$, $\mu(\{|f|>t\})\leq ct^{-p}$.

Exercice 2. (*Intégration par parties*) Soit f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ localement intégrables (i.e. intégrables sur tout compact pour la mesure de Lebesgue). On pose, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que, pour tous $a<b$,

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_a^b F(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b G(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corrigé. Il suffit de montrer que

$$\int_a^b (F(b)-F(t))g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (G(t)-G(a))f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_a^b (F(b)-F(t))g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b\left(\int_t^b f(s)\,\mathrm{d}s\right)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b\left(\int_a^b \mathbb{1}_{s\geq t}f(s)g(t)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b\left(\int_a^b \mathbb{1}_{s\geq t}f(s)g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \int_a^b\left(\int_a^s g(t)\,\mathrm{d}t\right)f(s)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_a^b (G(s)-G(a))f(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini-Lebesgue à la fonction

$$\varphi(s,t) := \mathbb{1}_{s\geq t}f(s)g(t)$$

qui est intégrable sur $[a,b]^2$ pour $\lambda\otimes\lambda$, car

$$\int_{[a,b]^2}|\varphi(s,t)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \leq \int_{[a,b]^2}|f(s)g(t)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b |f(s)|\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t\right)<\infty,$$

par le théorème de Fubini-Tonelli.

2 – Changement de variables

Exercice 3. (*Changement de variables polaire*)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$
2. (*Application*) Utiliser la fonction $f : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ pour calculer $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé.

1. On considère la bijection $\mathcal{C}^1$
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$
On a alors
$$\varphi'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$
et donc $|J_\varphi(r,\theta)| = r \neq 0$ et φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Ainsi, par la formule de changement de variable, on obtient
$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})} f\,\mathrm{d}\lambda_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$
et comme $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ est de mesure nulle pour λ_2 cela conclut.
2. D'une part, on a
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right)^2 = 4\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \right)^2.$$
et, d'autre part, par la question 1.,
$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \left[\frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \pi.$$
On en conclut que $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 4. (*Changement de variables sphérique*)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi) r^2 \cos(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$
On appelle θ la *longitude* et φ la *latitude*.
2. (*Application*) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|x\|_2^\alpha$ soit intégrable sur $B(0,1)$. Et sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)$?

Corrigé.

1. On considère la bijection $\mathcal{C}^1$

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{array}$$

On a alors

$$\psi'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

et donc $|J_\psi(r,\theta)| = r^2\cos\varphi \neq 0$ et ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Ainsi, par la formule de changement de variable, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi) r^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

car $\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$ est de mesure nulle pour λ_3.

2. D'après la question 1., on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|x\|^\alpha \,\mathbb{1}_{x\in B(0,1)}\,\mathrm{d}\lambda_3(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty r^\alpha \mathbb{1}_{r<1} r^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi\int_0^1 r^{\alpha+2}\,\mathrm{d}r,$$

et cette intégrale est finie si et seulement si $\alpha > -3$.
De même, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|x\|^\alpha \,\mathbb{1}_{x\notin B(0,1)}\,\mathrm{d}\lambda_3(x) = 4\pi\int_1^\infty r^{\alpha+2}\,\mathrm{d}r,$$

qui est finie si et seulement si $\alpha < -3$.

Exercice 5. (*Formule des compléments*)

1. Calculer la mesure image de la mesure

$$x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{\{x,y\geq 0\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

par l'application $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y))$.

2. En déduire la formule des compléments :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t,$$

où l'on rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $a>0$ par $\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
Remarque. L'intégrale obtenue est généralement notée $B(a,b)$ et la fonction B est appelée la fonction bêta.

Corrigé.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On veut calculer

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Soit $\phi : (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y))$, qui est un C^1-difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ de jacobien

$$J_\phi(x,y) = -\frac{1}{x+y}.$$

En outre, la réciproque de ϕ est $(u,v) \mapsto (uv, u(1-v))$. D'après la formule du changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\left((x+y)\frac{x}{x+y}\right)^{a-1}\left((x+y)-(x+y)\frac{x}{x+y}\right)^{b-1}(x+y)e^{-(x+y)}(x+y)^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} f(u,v)(uv)^{a-1}(u-uv)^{b-1} u e^{-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} f(u,v) e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Donc la mesure image par $(x,y) \mapsto (x+y, x/(x+y))$ de la mesure $x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{\{x,y>0\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est

$$e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\mathbb{1}_{\{u>0,0<v<1\}}.$$

2. Par définition de la mesure image, μ et ν ont même masse. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, la masse totale de μ est

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Gamma(a)\Gamma(b),$$

et celle de ν est

$$\int_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \Gamma(a+b)\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.$$

On trouve donc la formule des compléments.

3 – Mesure produit

Exercice 6. (*Produit de mesures de Lebesgue*) Soit $k, l \in \mathbb{N}^*$ et $n := k+l$. On note $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)$ la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$.

1. Est-ce que la mesure produit $\lambda_k \otimes \lambda_l$, définie sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)\otimes\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$ est complète ?
2. Montrer que la mesure de Lebesgue λ_n sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ est égale à la mesure produit $\lambda_k\otimes\lambda_l$ complétée.

Corrigé.

1. La mesure produit $\lambda_k \otimes \lambda_l$ n'est pas complète. Pour voir cela, soit $A \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)$ tel que $\lambda_k(A) = 0$ et soit $B \subset \mathbb{R}^l$ tel que $B \notin \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$ (existe d'après le cours). Alors $A \times B \subset A \times \mathbb{R}^l$ et $\lambda_k \otimes \lambda_l(A\times\mathbb{R}^l) = 0$ donc $A\times B$ est négligeable. Mais si $A \times B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)\otimes\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, alors ses sections selon la 2e coordonnée appartiennent à $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, c'est-à-dire $B \notin \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, ce qui est absurde. Donc $A\times B \notin \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)\otimes\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, qui n'est donc pas complète pour $\lambda_k\otimes\lambda_l$.
2. Procédons par étapes :
   - ▷ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)\otimes\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$: cela découle directement de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$. Ainsi λ_n et $\lambda_k\otimes\lambda_l$ sont bien définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
   - ▷ Montrons que λ_n et $\lambda_k\otimes\lambda_l$ coïncident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Elles coïncident sur les pavés ouverts

$$\mathcal{P} := \left\{\prod_{i=1}^n]a_i, b_i[: \forall 1 \le i \le n, a_i \le b_i\right\}$$

   qui sont stables par intersections finies et engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $]-k,k[^n \in \mathcal{P}$ et $\lambda_n(]-k,k[^n) = \lambda_k\otimes\lambda_l(]-k,k[^n) < \infty$ et $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]-k,k[^n$. On peut donc appliquer le théorème d'unicité des mesures σ-finies : λ_n et $\lambda_k\otimes\lambda_l$ coïncident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

- ▷ Montrons que $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$. Pour $A \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)$, il existe $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ tels que $A_1 \subset A \subset A_2$ et $\lambda_k(A_1) = \lambda_k(A_2)$. Et, pour $B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, soit B_1 et B_2 définis de même. Alors $A_1 \times B_1 \subset A \times B \subset A_2 \times B_2$, avec $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et, en utilisant le 2ᵉ point,

$$\lambda_n(A_1 \times B_1) = \lambda_k(A_1)\lambda_l(B_1) = \lambda_k(A_2)\lambda_l(B_2) = \lambda_n(A_2 \times B_2),$$

  et donc $A \times B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$. Or $\{A \times B : A \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k), B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)\}$ engendre $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$ donc on obtient $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$.
- ▷ Montrons que λ_n et $\lambda_k \otimes \lambda_l$ coïncident sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$. En effet, soit $C \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$. Alors $C \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ donc il existe $C_1, C_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tels que $C_1 \subset C \subset C_2$ et $\lambda_n(C_1) = \lambda_n(C) = \lambda_n(C_2)$. Mais, par le 2ᵉ point, on a

$$\lambda_k \otimes \lambda_l(C_1) = \lambda_n(C_1) = \lambda_n(C_2) = \lambda_k \otimes \lambda_l(C_2)$$

  et, comme $C \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$,

$$\lambda_k \otimes \lambda_l(C_1) \leq \lambda_k \otimes \lambda_l(C) \leq \lambda_k \otimes \lambda_l(C_2),$$

  donc $\lambda_k \otimes \lambda_l(C) = \lambda_n(C)$.
- ▷ Concluons. On a vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ et que λ_n et $\lambda_k \otimes \lambda_l$ coïncident sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$. Donc en prenant la complétion pour cette même mesure, on obtient

$$\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)} \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$$

  et donc $\overline{\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)} = \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda_n = \overline{\lambda_k \otimes \lambda_l}$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. (*Mesure de Lebesgue sur la sphère unité*) On se place sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue λ_d et de la norme euclidienne. On note $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

1. (*Mesure de Lebesgue sur la sphère unité*) Pour $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, on pose

$$\Theta(A) := \{rx : r \in [0,1] \text{ et } x \in A\} \quad \text{et} \quad \omega_d(A) := d\lambda_d(\Theta(A)).$$

   Montrer que ω_d est une mesure finie sur S^{d-1} invariante par isométries vectorielles de $\mathbb{R}^d$.
2. (*Changement de variable radial*) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(rz) r^{d-1}\,\mathrm{d}\omega_d(z)\,\mathrm{d}r.$$

   Indication. On pourra commencer par le cas où $f = \mathbb{1}_B$ avec B de la forme

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : a < \|x\| \leq b \text{ et } \frac{x}{\|x\|} \in A\right\},$$

   où A est un borélien de S^{d-1} et $0 < a \leq b$.
3. (*Volume de la boule unité*) En utilisant la fonction $f : x \mapsto \exp(-\|x\|^2)$, calculer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, en l'exprimant à partir de la fonction Gamma.

Corrigé.

1. On remarque que ω_d est bien une mesure en tant que mesure image de $d\lambda_d$ sur S^{d-1} par l'application
$$x \in \overline{B}(0,1) \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$
La masse totale de ω_d est
$$\omega_d(S^{d-1}) = d\lambda_d(\overline{B}(0,1))$$
et est donc finie.
Enfin, si φ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, on a
$$\Gamma(\varphi^{-1}(A)) = \{r\varphi^{-1}(x) : r \in [0,1] \text{ et } x \in A\} = \{\varphi^{-1}(rx) : r \in [0,1] \text{ et } x \in A\} = \varphi^{-1}(\Gamma(A))$$
et donc
$$\omega_d(\varphi^{-1}(A)) = d\lambda_d(\Gamma(\varphi^{-1}(A))) = d\lambda_d(\varphi^{-1}(\Gamma(A))) = d\lambda_d(\Gamma(A)) = \omega_d(A),$$
en utilisant le fait que λ_d est invariante par isométries vectorielles de $\mathbb{R}^d$.
Remarque. On peut montrer que ω_d est la seule mesure finie sur S^{d-1} invariante par isométries vectorielles de $\mathbb{R}^d$, à multiplication près par une constante. Mais on n'a pas d'unicité pour les mesures sur $\mathbb{R}^d$ invariantes par isométries vectorielles et finies sur les bornés : par exemple, ω_d prolongée sur $\mathbb{R}^d$ par $\omega_d(\mathbb{R}^d \setminus S^{d-1}) = 0$ n'est pas multiple de λ_d.
2. Notons $\mathcal{C}$ la famille des ensembles B de la forme
$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : a < \|x\| \leq b \text{ et } \frac{x}{\|x\|} \in A\right\},$$
où A est un borélien de S^{d-1} et $0 < a \leq b$. En outre, définissons une mesure μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ en posant
$$\mu(C) := \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \mathbb{1}_C(rz) r^{d-1} \, \mathrm{d}\omega_d(z) \, \mathrm{d}r,$$
pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Alors il suffit de montrer que $\mu = \lambda_d$.
Commençons par considérer $B \in \mathcal{C}$ défini comme ci-dessus. Alors on a
$$\begin{aligned}\mu(B) &= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \mathbb{1}_{a<r\leq b} \mathbb{1}_{z\in A} r^{d-1} \, \mathrm{d}\omega_d(z) \, \mathrm{d}r = \omega_d(A) \int_a^b r^{d-1} \, \mathrm{d}r \\ &= \omega_d(A) \frac{b^d - a^d}{d} = \lambda_d(\Gamma(A))(b^d - a^d).\end{aligned}$$
D'autre part, on a, en remarquant que $B = b\Gamma(A) \setminus a\Gamma(A)$,
$$\lambda_d(B) = \lambda_d(b\Gamma(A)) - \lambda_d(a\Gamma(A)) = (b^d - a^d)\lambda_d(\Gamma(A)).$$
Ainsi, on a montré que μ et λ_d coïncident sur $\mathcal{C}$.
On remarque tout d'abord que $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies. Montrons maintenant que $\mathcal{C}$ engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on pose
$$\delta(x,y) := \max\left(\big|\|x\| - \|y\|\big|, \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|\right),$$
et on vérifie aisément que c'est une distance et qu'elle engendre la même topologie que la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (on peut remarquer qu'elles ont les même suites convergentes). Pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $r > 0$, la boule de centre x et de r pour la distance δ est
$$\begin{aligned}B_\delta(x,r) &= \left\{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \|x\| - r < \|y\| < \|x\| + r \text{ et } \frac{y}{\|y\|} \in B_{S^{d-1}}\left(\frac{x}{\|x\|}, r\right)\right\}, \\ &= \bigcup_{n\geq 1} \left\{y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \|x\| - r < \|y\| \leq \|x\| + r\left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ et } \frac{y}{\|y\|} \in B_{S^{d-1}}\left(\frac{x}{\|x\|}, r\right)\right\},\end{aligned}$$

et donc $B_\delta(x,r) \in \mathcal{C}$ dès que $r < \|x\|$. D'autre part, par séparabilité de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, tout ouvert s'écrit comme réunion dénombrable de boules ouvertes pour la distance δ : si U est un ouvert (non vide et différent de $\mathbb{R}^d$, sinon c'est facile), on considère $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans U et $r_k := \delta(x_k, U^c)$ et alors on a

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_\delta(x_k, r_k).$$

Ainsi $\sigma(\mathcal{C})$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donc contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. En outre, $\mathcal{C}$ contient une suite croissante d'ensembles dont l'union dénombrable recouvre $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et surlesquels λ_d est finie, donc par le théorème d'unicité des mesures σ-finies, on a $\mu = \lambda_d$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Comme le singleton $\{0\}$ est de mesure nulle pour μ et λ_d, on en déduit que $\mu = \lambda_d$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

3. D'une part, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^d = \pi^{d/2},$$

et, d'autre part, en utilisant la question 2.,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \mathrm{e}^{-r^2} r^{d-1}\,\mathrm{d}\omega_d(z)\,\mathrm{d}r = \omega_d(S^{d-1}) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r^{d-1}\,\mathrm{d}r \\ &= d\lambda_d(\overline{B}(0,1)) \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} u^{\frac{d}{2}-1} \frac{\mathrm{d}u}{2} = \lambda_d(\overline{B}(0,1)) \frac{d}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \\ &= \lambda_d(\overline{B}(0,1)) \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right).\end{aligned}$$

En combinant les deux, on obtient la formule souhaitée.

Exercice 8. (*Quelques calculs*)

1. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,\mathrm{d}y,$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$

2. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \cos(xy)\,\mathrm{d}y$, et en déduire, pour tout $t > 0$, la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x.$$

Corrigé.

1. Pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2-1} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}\right) \mathrm{d}y = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+x^2y)}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+y)(1+x^2y)}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y}\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\arctan\left(\sqrt{y}x\right)\right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)\sqrt{y}} = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{4},\end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{y}$.

2. Pour $x>0$, on a
$$\int_0^1 \cos(xy)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_0^1 = \frac{\sin(x)}{x}.$$
Posons $G(x,y)=\cos(xy)\exp(-tx)$ pour $x\geq 0$, $y\in[0,1]$ et $t>0$. On a $|G(x,y)|\leq \exp(-tx)$ et $(x,y)\mapsto \exp(-tx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+\times[0,1]$ d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Donc G est intégrable sur $\mathbb{R}_+\times[0,1]$ et d'après le théorème de Fubini-Lebesgue,
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\left(\int_0^1 G(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\int_0^\infty \cos(xy)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\left(\int_0^\infty \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{(iy-t)x}+\mathrm{e}^{(-iy-t)x}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-iy}+\frac{1}{t+iy}\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 \frac{t}{y^2+t^2}\,\mathrm{d}y = \arctan\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

Exercice 9. (*Quelque chose d'amusant*) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que, pour λ-presque tout $y\in\mathbb{R}$, on a $\lambda(\{x\in\mathbb{R}: f(x)=y\})=0$.

Corrigé. On écrit, en utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions positives :
$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\,\lambda(\{x\in\mathbb{R}; f(x)=y\}) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathbb{1}_{\{f(x)=y\}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,\lambda(\{y\in\mathbb{R}; f(x)=y\}) = \int_{\mathbb{R}} 0\cdot\mathrm{d}x = 0.$$
Le résultat en découle, car une fonction positive d'intégrale nulle est presque partout nulle.
Autre solution. Pour $m,n\geq 1$, on note
$$A_{m,n} = \left\{y\in\mathbb{R}: \lambda\left(\{f^{-1}(\{y\})\cap[-m,m]\}\right) > \frac{1}{n}\right\}.$$
Il est facile de voir que $A_{m,n}$ est fini (de cardinal inférieur à $2mn$). Ainsi,
$$\{y\in\mathbb{R}: \lambda(\{x\in\mathbb{R}: f(x)=y\})>0\} = \bigcup_{m,n\geq 1} A_{m,n}$$
est dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. Ceci conclut.

Exercice 10. (*Intégration par parties pour l'intégrale de Stieljes*) Soit $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ des fonctions croissantes, continues à droite, bornées telles que $F(-\infty)=G(-\infty)=0$. On note $\mathrm{d}F$ et $\mathrm{d}G$ leurs mesures de Stieljes (voir l'exercice 2 du DM 2).

1. Montrer que, pour tous $a<b$, on a
$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_{]a,b]} F(t)\,\mathrm{d}G(t) + \int_{]a,b]} G(t-)\,\mathrm{d}F(t).$$

2. Soit $a<b$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur G et F pour que
$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_{]a,b]} F(t)\,\mathrm{d}G(t) + \int_{]a,b]} G(t)\,\mathrm{d}F(t),$$
c'est-à-dire pour que l'intégration par parties se passe "normalement".

Remarque. On peut généraliser l'intégrale de Stieljes et l'intégration par partie démontrée à la question 1. aux fonctions F et G continues à droite et à variation finie sur les intervalles bornés (qui sont exactement les fonctions s'écrivant comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite). Les mesures de Stieljes $\mathrm{d}F$ et $\mathrm{d}G$ sont alors des mesures de Radon signées (qui seront étudiées prochainement dans le cours).

Corrigé.

1. On procède comme dans l'exercice 2. On remarque que F est intégrable sur $]a,b]$ pour $\mathrm{d}G$ car F est mesurable et bornée et $\mathrm{d}G$ est une mesure finie. Ainsi, $\int_{]a,b]} F\,\mathrm{d}G < \infty$ et on a

$$\begin{aligned}
F(b)(G(b)-G(a)) - \int_{]a,b]} F(t)\,\mathrm{d}G(t) &= \int_{]a,b]} (F(b)-F(t))\,\mathrm{d}G(t) = \int_{]a,b]} \left(\int_{]t,b]} \mathrm{d}F(s) \right) \mathrm{d}G(t) \\
&= \int_{]a,b]} \left(\int_{]a,b]} \mathbb{1}_{s>t}\,\mathrm{d}F(s) \right) \mathrm{d}G(t) = \int_{]a,b]} \left(\int_{]a,b]} \mathbb{1}_{s>t}\,\mathrm{d}G(t) \right) \mathrm{d}F(s) \\
&= \int_{]a,b]} \left(\int_{]a,s[} \mathrm{d}G(t) \right) \mathrm{d}F(s) = \int_{]a,b]} (G(s-)-G(a))\,\mathrm{d}F(s) \\
&= \int_{]a,b]} G(s-)\,\mathrm{d}F(s) - G(a)(F(b)-F(a)),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini-Tonelli. Cele donne le résultat attendu.

2. En revenant à la définition de la mesure de Stieljes, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}F(\{x\}) = F\left( ]-\infty, x] \setminus \bigcup_{n\geq 1} \left]-\infty, x-\frac{1}{n}\right] \right) = F(x) - \lim_{n\to\infty} F\left(x-\frac{1}{n}\right) = F(x) - F(x-).$$

Ainsi, l'ensemble des atomes ponctuels de $\mathrm{d}F$ coïncide avec l'ensemble D_F des points de discontinuité de F (voir l'exercie 4 du DM 1 pour la définition d'un atome ponctuel). Comme $\mathrm{d}F$ est finie, D_F est au plus dénombrable.
On a l'égalité souhaitée ssi

$$\int_{]a,b]} (G(t)-G(t-))\,\mathrm{d}F(t) = 0.$$

Or, on a

$$G(t)-G(t-) = \sum_{x\in D_G\cap]a,b]} (G(x)-G(x-))\mathbb{1}_{\{x\}}(t)$$

et donc, par le théorème de convergence monotone (seulement dans le cas où $D_G\cap]a,b]$ est infini et on l'écrit alors sous la forme d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$),

$$\begin{aligned}
\int_{]a,b]} (G(t)-G(t-))\,\mathrm{d}F(t) &= \sum_{x\in D_G\cap]a,b]} (G(x)-G(x-))\,\mathrm{d}F(\{x\}) \\
&= \sum_{x\in D_G\cap]a,b]} (G(x)-G(x-))(F(x)-F(x-)) \\
&= \sum_{x\in D_G\cap D_F\cap]a,b]} (G(x)-G(x-))(F(x)-F(x-)),
\end{aligned}$$

car, si $x \notin D_F$, alors $F(x)-F(x-) = 0$. Pour tout $x \in D_G \cap D_F$, on a $(G(x)-G(x-))(F(x)-F(x-)) > 0$, donc on a l'égalité souhaitée ssi

$$D_G \cap D_F \cap]a,b] = \emptyset,$$

c'est-à-dire F et G n'ont aucun point de discontinuité en commun sur $]a,b]$.

Exercice 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} \lambda_n(\mathrm{d}x),$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et λ_n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Corrigé. La matrice A est symétrique définie positive donc il existe K une matrice symétrique définie positive telle que $A = K^2$. Soit $\phi\colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto Kx$. L'application ϕ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $|\mathrm{Jac}(\phi)| = \det(K)$. On a donc d'après le théorème du changement de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\lambda_n(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Kx,Kx\rangle}\lambda_n(\mathrm{d}x) = (\det(K))^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n = \prod_{1\le i\le n}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_i^2}\,\mathrm{d}x_i\right).$$

Or pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\lambda_n(\mathrm{d}x) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}.$$

Exercice 12. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Montrer que

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}),$$

où $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

Corrigé.

1. Soit $(E_n)_{n\ge 0}$ une suite croissante de boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\ge 0} E_n$ et telle que $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \ge 0$. On note $D_n = \{x \in E_n : \mu(x) \ge 1/n\}$. Si D_n est infini alors il contient une suite $(y_m)_{m\ge 1}$ et

$$\mu(E_n) \ge \mu(D_n) \ge \mu(\{y_m, m \ge 1\}) = \sum_{m\ge 1}\mu(\{y_m\}) \ge \sum_{m\ge 1}\frac{1}{n} = \infty,$$

ce qui est impossible. On en déduit donc que D_n est fini. Puis $D = \bigcup_{n\ge 0} D_n$ est fini ou dénombrable.

2. D'après le théorème de Fubini-Tonelli appliqué à $\mu\otimes\nu$, on a

$$\mu\otimes\nu(\Delta) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Delta(x,y)\mu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{y\})\,\nu(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{x\in D_\mu} \mu(\{x\})\mathbb{1}_{\{x=y\}}\nu(\mathrm{d}y).$$

On introduit $\tilde{\mu} := \sum_{x\in D_\mu} \mu(\{x\})\delta_x$ qui est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$. Alors, l'égalité précédente donne, en appliquant de nouveau le théorème de Fubini-Tonelli à $\tilde{\mu}\otimes\nu$,

$$\mu\otimes\nu(\Delta) = \tilde{\mu}\otimes\nu(\Delta).$$

Ainsi, on a, en appliquant l'égalité précédente à $(\nu,\tilde{\mu})$ au lieu de (μ,ν),

$$\tilde{\mu}\otimes\nu(\Delta) = \nu\otimes\tilde{\mu}(\Delta) = \tilde{\nu}\otimes\tilde{\mu}(\Delta) = \tilde{\mu}\otimes\tilde{\nu}(\Delta).$$

On obtient alors, avec le théorème de Fubini-Tonelli appliqué à $\tilde{\mu}\otimes\tilde{\nu}(\Delta)$,

$$\mu\otimes\nu(\Delta) = \tilde{\mu}\otimes\tilde{\nu}(\Delta) = \sum_{x\in D_\mu}\mu(\{x\})\sum_{y\in D_\mu}\nu(\{y\})\mathbb{1}_{\{x=y\}} = \sum_{x\in D_\mu\cap D_\nu}\mu(\{x\})\nu(\{x\}) = \sum_{x\in\mathbb{R}}\mu(\{x\})\nu(\{x\}).$$

Exercice 13. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{A})$. Soit f et g deux fonctions $(\mathbb{R},\mathcal{A}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f, g et fg sont dans $L^1(\mathbb{R},\mathcal{A},\mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Corrigé. On considère la fonction $F(x,y) = (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$. La fonction F est positive donc $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) \geq 0$. De plus, $f,g \in L^1(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|\big|g(y)\big|\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} |g|\,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Ainsi, la fonction $(x,y) \mapsto f(x)g(y) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. De même $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et μ est une mesure de probabilité, donc $(x,y) \mapsto f(x)g(x) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. On peut donc écrire

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) - 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Et d'après le théorème de Fubini-Lebesgue, on a

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} fg\,\mathrm{d}\mu,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\mu,$$

ce qui nous donne le résultat.

Fin