TD 5 – Théorèmes de Fubini et changement de variables

1 – Théorèmes de Fubini

Exercice 1. (*Quelque chose d'utile*) Sur un espace mesuré σ-fini $(E, \mathcal{A}, \mu)$, on considère $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable.

1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que
$$\int_E g \circ f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^\infty g'(t)\mu(\{f \geq t\})\,\mathrm{d}t.$$
Indication. On pourra écrire $g(f(t))$ comme une intégrale.
2. Montrer que
$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \mu\{f \geq t\}\,\mathrm{d}t.$$
3. On considère à présent $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable et on suppose que μ est finie et qu'il existe $p > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout $t > 0$, $\mu(\{|f| \geq t\}) \leq ct^{-p}$. Montrer que $f \in L^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $q \in]0, p[$. A-t-on forcément $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$?

Exercice 2. (*Intégration par parties*) Soit f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement intégrables (i.e. intégrables sur tout compact pour la mesure de Lebesgue). On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que, pour tous $a < b$,
$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_a^b F(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b G(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 – Changement de variables

Exercice 3. (*Changement de variables polaire*)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que
$$\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$
2. (*Application*) Utiliser la fonction $f : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ pour calculer $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 4. (*Changement de variables sphérique*)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, \mathrm{d}\lambda_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi) r^2 \cos(\varphi) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi.$$

   On appelle θ la *longitude* et φ la *latitude*.

2. (*Application*) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|x\|_2^\alpha$ soit intégrable sur $B(0,1)$. Et sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)$?

Exercice 5. (*Formule des compléments*)

1. Calculer la mesure image de la mesure

$$x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{x,y \geq 0\}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

   par l'application $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y))$.

2. En déduire la formule des compléments :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \, \mathrm{d}t,$$

   où l'on rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $a > 0$ par $\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$.
   Remarque. L'intégrale obtenue est généralement notée $B(a,b)$ et la fonction B est appelée la fonction bêta.

3 – Mesure produit

Exercice 6. (*Produit de mesures de Lebesgue*) Soit $k, l \in \mathbb{N}^*$ et $n := k + l$. On note $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)$ la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$.

1. Est-ce que la mesure produit $\lambda_k \otimes \lambda_l$, définie sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$ est complète ?
2. Montrer que la mesure de Lebesgue λ_n sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ est égale à la mesure produit $\lambda_k \otimes \lambda_l$ complétée.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. (*Mesure de Lebesgue sur la sphère unité*) On se place sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue λ_d et de la norme euclidienne. On note $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

1. (*Mesure de Lebesgue sur la sphère unité*) Pour $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, on pose

$$\Theta(A) := \{rx : r \in [0,1] \text{ et } x \in A\} \quad \text{et} \quad \omega_d(A) := d\lambda_d(\Theta(A)).$$

   Montrer que ω_d est une mesure finie sur S^{d-1} invariante par isométries vectorielles de $\mathbb{R}^d$.

2. (*Changement de variable radial*) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(rz) r^{d-1} \, \mathrm{d}\omega_d(z) \, \mathrm{d}r.$$

   Indication. On pourra commencer par le cas où $f = \mathbb{1}_B$ avec B de la forme

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : a < \|x\| \leq b \text{ et } \frac{x}{\|x\|} \in A \right\},$$

   où A est un borélien de S^{d-1} et $0 < a \leq b$.

3. (*Volume de la boule unité*) En utilisant la fonction $f\colon x \mapsto \exp(-\|x\|^2)$, calculer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, en l'exprimant à partir de la fonction Gamma.

Exercice 8. (*Quelques calculs*)

1. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale
$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\,\mathrm{d}y,$$
et en déduire la valeur de
$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$
2. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \cos(xy)\,\mathrm{d}y$, et en déduire, pour tout $t > 0$, la valeur de
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 9. (*Quelque chose d'amusant*) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que, pour λ-presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0$.

Exercice 10. (*Intégration par parties pour l'intégrale de Stieljes*) Soit $F, G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes, continues à droite, bornées telles que $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$. On note $\mathrm{d}F$ et $\mathrm{d}G$ leurs mesures de Stieljes (voir l'exercice 2 du DM 2).

1. Montrer que, pour tous $a < b$, on a
$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_{]a,b]} F(t)\,\mathrm{d}G(t) + \int_{]a,b]} G(t-)\,\mathrm{d}F(t).$$
2. Soit $a < b$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur G et F pour que
$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_{]a,b]} F(t)\,\mathrm{d}G(t) + \int_{]a,b]} G(t)\,\mathrm{d}F(t),$$
c'est-à-dire pour que l'intégration par parties se passe “normalement”.

Remarque. On peut généraliser l'intégrale de Stieljes et l'intégration par partie démontrée à la question 1. aux fonctions F et G continues à droite et à variation finie sur les intervalles bornés (qui sont exactement les fonctions s'écrivant comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite). Les mesures de Stieljes $\mathrm{d}F$ et $\mathrm{d}G$ sont alors des mesures de Radon signées (qui seront étudiées prochainement dans le cours).

Exercice 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale
$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\lambda_n(\mathrm{d}x),$$
où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et λ_n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Montrer que
$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}),$$
où $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Soit f et g deux fonctions $(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f, g et fg sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\mu.$$

Fin