Géométrie Différentielle, TD 5 du 20 mars 2014

1. Formes différentielles sur un quotient

Soit X une variété C^∞ de dimension n et G un groupe agissant librement et proprement discontinûment par C^∞-difféomorphismes sur X. On note $p : X \to X/G$ l'application quotient.

1– Soit $k \geqslant 0$. Montrer que $p^* : \Omega^k(X/G) \to \Omega^k(X)$ est injective.

2– Montrer que l'image de $p^* : \Omega^k(X/G) \to \Omega^k(X)$ est l'ensemble $\Omega^k(X)^G$ des formes G-invariantes.

2. Formes différentielles $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$-invariantes

Soit ω la $n-1$-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ donnée par :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

1– Calculer $\mathrm{d}\omega$.

2– Montrer que $\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \det(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$.

3– Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^*\omega$?

4– Montrer que ω est, à constante multiplicative près, la seule forme de degré $n-1$ invariante par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

5– Montrer en revanche que, si $n \geqslant 3$, toute 1-forme différentielle invariante par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ est nulle.

3. Le fibré des formes différentielles

Soit M une variété C^∞ de dimension n et $0 \leqslant k \leqslant n$. Notons $\Omega^k M$ l'ensemble des couples (x, ω) où $x \in M$ et ω est une k-forme linéaire alternée sur $T_x M$.

1– Montrer que $\Omega^k M$ a une structure naturelle de fibré vectoriel sur M.

2– Montrer qu'il y a une bijection naturelle entre $\Omega^k(M)$ et l'ensemble des sections C^∞ $s : M \to \Omega^k M$ de ce fibré vectoriel.

3– Montrer que M est orientable si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega^n(M)$ nulle part nulle. En déduire que M est orientable si et seulement si $\Omega^n M$ est un fibré vectoriel trivial.

4. Le fibré cotangent

On reprend les notations de l'exercice précédent et on note $\pi : \Omega^1 M \to M$ la projection naturelle.

1– Montrer qu'il existe une unique 1-forme différentielle α sur $\Omega^1 M$ telle que pour tout $(x, \omega) \in \Omega^1 M$, et tout $v \in T_{(x,\omega)}(\Omega^1 M)$, $\alpha_{(x,\omega)}(v) = \omega(d_x\pi(v))$.

2– Montrer que $d\alpha$ est nulle part dégénérée, et que $(d\alpha)^{\wedge n}$ est nulle part nulle. En déduire que $\Omega^1 M$ est orientable.

5. Mesure de Haar sur $GL_n(\mathbb{R})$

Soit $U = GL_n(\mathbb{R})$ vu comme ouvert de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. On définit une forme volume ω sur U par $\omega(A) = \frac{1}{(\det A)^n}\omega_0$, où ω_0 est la forme volume standard sur $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que ω est invariante par multiplication à gauche ou à droite par des matrices, et que c'est la seule forme volume sur $GL_n(\mathbb{R})$ à avoir cette propriété (à multiplication par un scalaire près).

6. Formes décomposables

On dira qu'une k-forme linéaire alternée ω sur $\mathbb{R}^n$ est décomposable s'il existe une 1-forme α et une $k-1$-forme β telles que $\omega = \alpha \wedge \beta$. On dira que ω est complètement décomposable s'il existe des 1-formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ avec $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$.

1– Montrer qu'une n-forme est toujours complètement décomposable.

2– Montrer que, étant données ω et $\alpha \neq 0$ respectivement une k-forme et une 1-forme, on peut écrire ω sous la forme $\alpha \wedge \beta$ si et seulement si $\alpha \wedge \omega = 0$.

3– Montrer que la 2-forme $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ sur $\mathbb{R}^4$ n'est pas décomposable.

4– Soit ω une k-forme non nulle, et $V_\omega = \{\alpha \text{ forme linéaire} \mid \alpha \wedge \omega = 0\}$. Montrer que c'est un espace vectoriel, et que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ est une famille libre de V_ω, alors il existe β telle que $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_i \wedge \beta$. En déduire que $\dim V_\omega \leqslant k$, avec égalité si et seulement si ω est complètement décomposable (dans ce cas, on dit que ω représente l'espace vectoriel $V = V_\omega$).

5– En déduire qu'une forme de degré $n - 1$ est toujours complètement décomposable.

6– Soient ω_1 et ω_2 représentant deux sous-espaces V_1 et V_2. Montrer que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ si et seulement si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, et qu'en ce cas $\omega_1 \wedge \omega_2$ représente $V_1 \oplus V_2$.

7– Soit X une variété et ω une forme de degré k sur X, nulle en aucun point. On suppose que pour tout x dans X, ω_x est complètement décomposable. Montrer qu'il existe localement k formes de degré 1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ telles que $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$, i.e. ω est localement complètement décomposable.

8– On suppose de plus, qu'il existe $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ des formes de degré 1 définies globalement et partout linéairement indépendantes telles que $\beta_i \wedge \omega = 0$. Montrer que ω est globalement complètement décomposable. Peut-on raffiner ce résultat ?