Géométrie Différentielle, TD 5 du 20 mars 2014

1. Formes différentielles sur un quotient

Soit X une variété C^∞ de dimension n et G un groupe agissant librement et proprement discontinûment par C^∞-difféomorphismes sur X. On note $p : X \to X/G$ l'application quotient.

1– Soit $k \geqslant 0$. Montrer que $p^* : \Omega^k(X/G) \to \Omega^k(X)$ est injective.

2– Montrer que l'image de $p^* : \Omega^k(X/G) \to \Omega^k(X)$ est l'ensemble $\Omega^k(X)^G$ des formes G-invariantes.

Solution :

1– Comme p^* est linéaire, il suffit de vérifier que son noyau est trivial, i.e. que p^* envoie une forme non nulle sur une forme non nulle.

Soit $\omega \in \Omega^k(X/G)$ non nulle. Soit $y \in X/G$ tel que ω_y soit non nul. Soit x un antécédent de y par p. Comme p est un difféomorphisme local, $d_x p$ est un isomorphisme, qui identifie donc T_xX et T_yX/G. Via cette identification, ω_y et $(p^*\omega)_x$ coïncident, de sorte que $(p^*\omega)_x$ est non nul. On a bien $p^*\omega \neq 0$.

2– Soit $g \in G$. Comme $p \circ g = p$, $g^*p^*\omega = p^*\omega$, de sorte que $p^*\omega$ est G-invariante. Réciproquement, soit ω une forme G-invariante sur X. Soit $y \in X/G$. On choisit x un antécédent de y, et on pose $\alpha_y = ((d_xp)^{-1})^*\omega_x$. Comme ω est G-invariante, α_y ne dépend pas du choix de x.

Pour montrer que α est C^∞, on choisit des voisinages U et V de x et de y tels que p réalise un difféomorphisme entre U et V. Alors $\alpha|_V = ((p|_U)^{-1})^*\omega|_U$, ce qui montre que $\alpha|_V$ est C^∞, comme voulu.

Finalement, par construction, on a bien $\omega = p^*\alpha$.

2. Formes différentielles $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$-invariantes

Soit ω la $n-1$-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ donnée par :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

1– Calculer $\mathrm{d}\omega$.

2– Montrer que $\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \det(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$.

3– Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^*\omega$?

4– Montrer que ω est, à constante multiplicative près, la seule forme de degré $n-1$ invariante par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

5– Montrer en revanche que, si $n \geqslant 3$, toute 1-forme différentielle invariante par $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ est nulle.

Solution :

1– Dans $\mathrm{d}\omega$, tous les termes donnent, après être réordonnés, un $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. Ainsi,

$$\mathrm{d}\omega = n\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

2– C'est le développement du déterminant par rapport à la première colonne.

3– On calcule :

$$\begin{aligned}(A^*\omega)(x).(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) &= \omega(Ax).(A\xi_1,\ldots,A\xi_{n-1}) = \det(Ax, A\xi_1,\ldots,A\xi_{n-1}) \\ &= \det(A)\det(x,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) = \det(A)\omega(x).(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\end{aligned}$$

i.e. $A^*\omega = \det(A)\omega$.

4– La question précédente montre que ω est invariante sous $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Pour montrer l'unicité, notons $x = (1,0,\ldots,0)$. La forme alternée ω_x détermine uniquement ω sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par homogénéité, donc sur tout $\mathbb{R}^n$ par continuité. Il reste à vérifier que ω_x est uniquement déterminée, à une constante multiplicative près. On peut pour cela l'écrire en coordonnées et écrire les conditions données par l'invariance de sous le stabilisateur de x dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. C'est un calcul explicite.

5– Une 1-forme invariante ω est uniquement déterminée par ω_{e_1} où e_1 est le premier vecteur de coordonnées. En effet, par invariance, ω_{e_1} détermine uniquement $\omega|_{\mathbb{R}^n\setminus 0}$, donc, par continuité, ω toute entière. Il suffit donc de vérifier que $\omega_{e_1} = 0$.

Or ω_{e_1} est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ invariante par le sous-groupe G de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ stabilisant e_1. Son noyau est de dimension $\geqslant 2$ et est G-invariant. On vérifie aisément que le seul tel sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est $\mathbb{R}^n$ tout entier, de sorte que $\omega_{e_1} = 0$.

3. Le fibré des formes différentielles

Soit M une variété C^∞ de dimension n et $0 \leqslant k \leqslant n$. Notons $\Omega^k M$ l'ensemble des couples (x,ω) où $x \in M$ et ω est une k-forme linéaire alternée sur T_xM.

1– Montrer que $\Omega^k M$ a une structure naturelle de fibré vectoriel sur M.

2– Montrer qu'il y a une bijection naturelle entre $\Omega^k(M)$ et l'ensemble des sections C^∞ $s : M \to \Omega^k M$ de ce fibré vectoriel.

3– Montrer que M est orientable si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega^n(M)$ nulle part nulle. En déduire que M est orientable si et seulement si $\Omega^n M$ est un fibré vectoriel trivial.

Solution :

1– On note $p : \Omega^k M \to M$ la projection. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un ouvert de cartes de M. Le pull back induit une bijection $\psi : p^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \bigwedge^k \mathbb{R}^{n*}$. On choisit ces applications comme cartes de fibré. La formule pour le pull-back d'une forme différentielle montre que les changements de carte de fibrés sont de la forme voulue, c'est-à-dire C^∞ et linéaires entre les fibres. On a donc bien muni $\Omega^k M$ d'une structure de fibré vectoriel.

2– Il y a une bijection entre « le choix d'une k-forme linéaire alternée en tout point », et les sections ensemblistes $s : M \to \Omega^k M$. Il reste à vérifier que les conditions d'être C^∞ sont équivalentes dans les deux cas. C'est une question locale ; on peut donc travailler dans une carte de fibré, où c'est évident (par définition de ce qu'est une k-forme différentielle).

3– S'il existe une telle section ω, on construit une orientation en choisissant pour cartes orientées les cartes qui envoient ω sur un multiple positif de la forme déterminant sur $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, si M est orientée, on construit ω localement en tirant en arrière par des cartes orientées la forme déterminant sur $\mathbb{R}^n$, et en recollant globalement à l'aide d'une partition de l'unité. L'équivalence entre l'orientabilité de M et la trivialité de $\Omega^n M$ résulte alors de la caractérisation des fibrés en droite triviaux, obtenue au TD 4.

4. Le fibré cotangent

On reprend les notations de l'exercice précédent et on note $\pi : \Omega^1 M \to M$ la projection naturelle.

1– Montrer qu'il existe une unique 1-forme différentielle α sur $\Omega^1 M$ telle que pour tout $(x, \omega) \in \Omega^1 M$, et tout $v \in T_{(x,\omega)}(\Omega^1 M)$, $\alpha_{(x,\omega)}(v) = \omega(d_x\pi(v))$.

2– Montrer que $d\alpha$ est nulle part dégénérée, et que $(d\alpha)^{\wedge n}$ est nulle part nulle. En déduire que $\Omega^1 M$ est orientable.

Solution :

1– Il faut vérifier le caractère C^∞ de α, ce qui est facile à voir dans des cartes locales. L'unicité de α est évidente.

2– Là encore, un calcul en cartes locales montre cela immédiatement. L'orientabilité de $\Omega^1(M)$ est alors conséquence de la question précédente.

5. Mesure de Haar sur $GL_n(\mathbb{R})$

Soit $U = GL_n(\mathbb{R})$ vu comme ouvert de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. On définit une forme volume ω sur U par $\omega(A) = \frac{1}{(\det A)^n}\omega_0$, où ω_0 est la forme volume standard sur $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que ω est invariante par multiplication à gauche ou à droite par des matrices, et que c'est la seule forme volume sur $GL_n(\mathbb{R})$ à avoir cette propriété (à multiplication par un scalaire près).

Solution :

Si φ est un difféomorphisme local, on sait que $\varphi^*(f\omega_0)(x) = J\varphi(x)f(\varphi(x))\omega_0$, où $J\varphi$ est le jacobien de φ, i.e. le déterminant de sa différentielle.

Ici, φ est la multiplication à gauche par une matrice M (le cas de la multiplication à droite étant analogue), qui est linéaire donc égale à sa différentielle. Soit E_{ij} la matrice élémentaire qui a un 1 en position (i, j) et des 0 ailleurs. Quand M est diagonale, $ME_{ij} = M_{ii}E_{ij}$, si bien que dans la base des E_{ij} la multiplication par M est diagonale, et son déterminant est $\prod(M_{ii})^n = \det(M)^n$. On en déduit le même résultat quand M est diagonalisable puis, par densité (quitte à passer sur $\mathbb{C}$), quand M est quelconque. Ainsi, $J\varphi(A) = \det(M)^n$, puis

$$\varphi^*\omega(A) = \det(M)^n \det(AM)^{-n}\omega_0 = \det(A)^{-n}\omega_0 = \omega(A),$$

i.e ω est invariante.

Pour l'unicité, si $\omega(A) = f(A)\omega_0$ est invariante, on peut supposer que $f(I_n) = 1$. En écrivant la même équation d'invariance que ci-dessus, on en déduit $f(A) = \det(A)^{-n}$.

Remarque : dès qu'un groupe agit transitivement (i.e. $\forall x, y, \exists g, g(x) = y$), il y a de même au plus une forme volume invariante par le groupe, pour les mêmes raisons.

6. Formes décomposables

On dira qu'une k-forme linéaire alternée ω sur $\mathbb{R}^n$ est décomposable s'il existe une 1-forme α et une $k-1$-forme β telles que $\omega = \alpha\wedge\beta$. On dira que ω est complètement décomposable s'il existe des 1-formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ avec $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$.

1– Montrer qu'une n-forme est toujours complètement décomposable.

2– Montrer que, étant données ω et $\alpha \neq 0$ respectivement une k-forme et une 1-forme, on peut écrire ω sous la forme $\alpha \wedge \beta$ si et seulement si $\alpha \wedge \omega = 0$.

3– Montrer que la 2-forme $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ sur $\mathbb{R}^4$ n'est pas décomposable.

4– Soit ω une k-forme non nulle, et $V_\omega = \{\alpha \text{ forme linéaire} \mid \alpha \wedge \omega = 0\}$. Montrer que c'est un espace vectoriel, et que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ est une famille libre de V_ω, alors il existe β telle que $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_i \wedge \beta$. En déduire que $\dim V_\omega \leqslant k$, avec égalité si et seulement si ω est complètement décomposable (dans ce cas, on dit que ω représente l'espace vectoriel $V = V_\omega$).

5– En déduire qu'une forme de degré $n-1$ est toujours complètement décomposable.

6– Soient ω_1 et ω_2 représentant deux sous-espaces V_1 et V_2. Montrer que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ si et seulement si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, et qu'en ce cas $\omega_1 \wedge \omega_2$ représente $V_1 \oplus V_2$.

7– Soit X une variété et ω une forme de degré k sur X, nulle en aucun point. On suppose que pour tout x dans X, ω_x est complètement décomposable. Montrer qu'il existe localement k formes de degré 1, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ telles que $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$, i.e. ω est localement complètement décomposable.

8– On suppose de plus, qu'il existe $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ des formes de degré 1 définies globalement et partout linéairement indépendantes telles que $\beta_i \wedge \omega = 0$. Montrer que ω est globalement complètement décomposable. Peut-on raffiner ce résultat ?

Solution :

1– Une n-forme s'écrit toujours $\omega = \lambda\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, qui est déjà décomposé !

2– Si $\omega = \alpha \wedge \beta$, alors $\alpha \wedge \omega = 0$ car $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Réciproquement, supposons que $\alpha \wedge \omega = 0$. On complète $\alpha =: \alpha_1$ avec $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de manière à former une base de $(\mathbb{R}^n)^*$. Alors $\alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k}$ (pour $i_1 < \ldots < i_k$) forme une base de $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*$, si bien qu'on peut écrire $\omega = \sum \lambda_I \alpha_I$, où I est un multiindice de longueur I. Dans $\alpha \wedge \omega$, tous les termes contenant α_1 disparaissent, tandis que les $\alpha_1 \wedge \alpha_I$, $1 \notin I$, forment une famille libre de $\Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)^*$. Comme $\alpha \wedge \omega = 0$, on en déduit que $\lambda_I = 0$ si $1 \notin I$, puis $\omega = \alpha \wedge \beta$.

3– On peut faire un calcul en coordonnées. On peut aussi utiliser le fait que $\omega \wedge \omega \neq 0$ en utilisant l'exercice précédent, alors que si on pouvait écrire $\omega = \alpha \wedge \beta$, on aurait $\omega \wedge \omega = 0$.

4– Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ sont libres, on les complète pour former une base de l'espace. En écrivant $\omega = \sum \lambda_I \alpha_I$, on obtient en faisant le produit extérieur avec α_l ($l \leqslant i$) que $\lambda_I = 0$ si $l \notin I$. Ainsi, si $\lambda_I \neq 0$, α_I se factorise par $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_i$.

5– Soit $\Phi : \alpha \mapsto \alpha \wedge \omega$. Elle va d'un espace de dimension n dans un espace de dimension 1, donc $\dim(\operatorname{Ker}\Phi) \geqslant n-1$. Mais $V_\omega = \operatorname{Ker}(\Phi)$, donc $\dim(V_\omega) \geqslant n-1$, ce qui conclut.

6– Soit $\omega_1 = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k_1}$ et $\omega_2 = \alpha_{k_1+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{k_1+k_2}$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_1}$ et $\alpha_{k_1+1}, \ldots, \alpha_{k_1+k_2}$ sont des bases respectivement de V_1 et V_2.

Si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, alors la famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_1}, \alpha_{k_1+1}, \ldots, \alpha_{k_1+k_2}$ est libre, si bien que le produit extérieur $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k_1+k_2}$ est non nul, i.e. $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Par contre, si $V_1 \cap V_2$ contient $\alpha \neq 0$, alors ω_i se met sous la forme $\alpha \wedge \beta_i$ pour $i = 1, 2$ (d'après la question 2), si bien que $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$.

7– On a un résultat infinitésimal et on veut un résultat local. On considère le morphisme de fibrés vectoriels :

$$\psi : T^*X \ni \alpha \mapsto \omega \wedge \alpha \in \Lambda^{k+1}T^*X.$$

Par la question 4 de l'exercice et par l'hypothèse infinitésimale faite sur ω, la dimension du noyau de ψ_x est égale à k et est donc indépendante de x. C'est alors un résultat classique (exercice !) que la famille des noyaux est naturellement munie d'une structure de sous-fibré vectoriel de T^*X ; on note V_ω ce sous-fibré vectoriel de rang k.

Localement, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, k sections locales de V_ω ; la même preuve que dans l'exercice 4 montre que, localement, $\omega = f\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$, où f est une fonction ne s'annulant pas, définie localement.

8– Avec les notations précédentes, les β_i sont des sections globales linéairement indépendantes de V_ω. Au vu des questions précédentes, il existe localement une décomposition $\omega = \alpha \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_{k-1}$. On conclut avec une partition de l'unité sur α.

L'hypothèse d'existence globale des β_i est essentielle : considérer ω la forme volume sur la sphère de dimension 2. L'existence d'une décomposition globale de ω impliquerait en particulier l'existence d'une forme de degré 1 partout non nulle. Or, le fibré cotangent est isomorphe au fibré tangent (utiliser l'application de dualité donnée par une métrique variant de façon C^∞ sur TM). Dès lors, on aurait l'existence d'un champ de vecteur partout non nul sur la sphère. Ceci est absurde, par le théorème de la boule chevelue.