Géométrie Différentielle, TD 5 du 16 mars 2015

1. Groupes de Lie et exponentielle

Soit G un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$, qui est aussi une sous-variété de $GL(n, \mathbb{R})$. On note $\mathfrak{g}$ l'espace tangent de G en l'identité.

1– Montrer que l'exponentielle de matrices envoie $\mathfrak{g}$ dans G.

2– Montrer que le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ est la composante connexe de l'identité de G.

3– Donner un exemple, avec G connexe, où $\exp : \mathfrak{g} \to G$ n'est pas surjective.

2. Voisinage tubulaire

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On définit le fibré normal de X, comme le sous-ensemble NX de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par :

$$NX = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in X, v \perp T_x X\}.$$

On définit une application can : $NX \to \mathbb{R}^n, (x, v) \mapsto x + v$.

1– Soit x dans X. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X et k fonctions lisses $e_i : U \to \mathbb{R}^n$ tels que pour tout y dans U, $(e_1(y), \ldots, e_k(y))$ est une base de $T_y X$.

2– En déduire que NX est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et préciser sa dimension.

3– Montrer que can est un difféomorphisme local au voisinage de tout $(x, 0)$, avec $x \in X$.

4– On note $N^\varepsilon X$ l'ouvert de NX des points (x, v) tels que $|v| < \varepsilon$, où $|v|$ est la norme euclidienne de v. On suppose X compact. Montrer qu'il existe ε tel que can : $N^\varepsilon X \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme sur un voisinage ouvert de X.

5– L'application can est-elle un difféomorphisme local au voisinage de tout (x, v) de NX ?

3. Revêtement de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathbb{RP}^n$

Soit $\mathbb{RP}^n$ l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$. On l'identifie à l'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang 1 dans les matrices carrées de taille $(n + 1, n + 1)$, ce qui lui confère une structure de sous-variété (cf. cours). On note π l'application de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{RP}^n$, qui à v associe la droite engendrée par v.

1– Montrer que π est $\mathcal{C}^\infty$.

2– Montrer que π est un revêtement à deux feuillets, au sens suivant : pour tout x dans $\mathbb{RP}^n$, il existe un voisinage ouvert U contenant x et un difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \{1, 2\}$ tels que $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \pi$. Ici, $\mathrm{pr}_1 : U \times \{1, 2\} \to U$ désigne la première projection.

4. Grassmanniennes et matrices

On note $G(k,n)$ la Grassmannienne des k-plans dans $\mathbb{R}^n$, vus comme projecteurs orthogonaux de rang k dans les matrices (n,n).

1– Montrer que si E est un point de $G(k,n)$, il existe un voisinage ouvert U de E dans $G(k,n)$ et des applications $e_1,\ldots,e_k : U \to \mathbb{R}^n$ tels que pour tout F dans U, $(e_1(F),\ldots,e_k(F))$ soit une base de F.

2– Soit L_0 une matrice (k,n) et E_0 dans $G(k,n)$. On suppose que $L_{0|E_0}$ est un isomorphisme. Montrer que si L est proche de L_0 et si E est proche de E_0, alors $L_{|E}$ est un isomorphisme.

3– Montrer qu'il existe une unique application locale $S : M_{k,n}(\mathbb{R}) \times G(k,n) \to M_{n,k}(\mathbb{R})$ définie sur un voisinage de (L_0,E_0) telle que, pour tout (L,E) dans ce voisinage,

$$L \circ S(L,E) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$$

et telle que l'image de $S(L,E)$ soit égale à E.