Géométrie Différentielle, TD 5 du 16 mars 2015

1. Groupes de Lie et exponentielle

Soit G un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$, qui est aussi une sous-variété de $GL(n,\mathbb{R})$. On note $\mathfrak{g}$ l'espace tangent de G en l'identité.

1– Montrer que l'exponentielle de matrices envoie $\mathfrak{g}$ dans G.

2– Montrer que le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ est la composante connexe de l'identité de G.

3– Donner un exemple, avec G connexe, où $\exp : \mathfrak{g} \to G$ n'est pas surjective.

Solution :

1– Soit X une matrice de $M(n,\mathbb{R})$. Elle permet de définir un champ de vecteurs noté $\widetilde{X}$ sur $M(n,\mathbb{R})$, par $\widetilde{X}(M) = XM$, où on identifie $T_M M(n,\mathbb{R})$ à $M(n,\mathbb{R})$. Si $g \in G$, notons $R_g : G \to G$ la multiplication à droite par g. C'est un difféomorphisme de G et donc $T_g G = T_e G.g$, où la multiplication a lieu dans $M(n,\mathbb{R})$. En particulier, si $X \in \mathfrak{g}$, alors le champ de vecteurs $\widetilde{X}$ est tangent à G en tout point.

Soit donc $X \in \mathfrak{g}$. On considère $\gamma(t) = \exp(tX)$, chemin *a priori* à valeurs dans $GL(n,\mathbb{R})$. Il vérifie le problème de Cauchy $\gamma(0) = e, \dot{\gamma}(t) = \widetilde{X}(\gamma(t))$. D'après ce qui précède, c'est un problème de Cauchy dans la sous-variété G, donc par unicité γ est à valeurs dans G. En particulier, $\gamma(1) = \exp(X)$ est dans G.

2– La différentielle de l'exponentielle en e est l'identité. Donc $\exp(\mathfrak{g})$ contient un voisinage de l'identité dans G. C'est alors un lemme classique, valable sur n'importe quel groupe topologique, que le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ contient la composante connexe de l'identité de G. Par connexité, le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ est exactement la composante connexe de l'identité de G.

3– L'exponentielle n'est pas surjective de $M(n,\mathbb{R})$ dans $GL^+(n,\mathbb{R})$. Soit A dans $M(n,\mathbb{R})$ dont les valeurs propres complexes sont λ_i avec multiplicité m_i. Alors, les valeurs propres complexes de $\exp(A)$ sont les $\exp(\lambda_i)$ avec multiplicité m_i (attention, on peut avoir $\exp(\lambda_i) = \exp(\lambda_j)$ avec $i \neq j$). En particulier, si B est diagonale avec n valeurs propres distinctes λ_i, et si $\exp(A) = B$, alors A est diagonalisable avec n valeurs propres distinctes μ_i telles que $\exp(\mu_i) = \lambda_i$. Comme A est réelle, l'ensemble des μ_i doit de plus être stable par conjugaison. Si les λ_i vérifient $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ et les autres λ_i sont strictement positifs, alors on ne peut pas trouver de μ_i vérifiant les conditions énoncées.

En fait, on peut montrer que l'image de l'exponentielle est exactement l'ensemble des matrices de $GL(n,\mathbb{R})$ admettant une racine carrée. Mais ce n'est pas très explicite...

2. Voisinage tubulaire

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On définit le fibré normal de X, comme le sous-ensemble NX de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par :

$$NX = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \in X, v \perp T_x X\}.$$

On définit une application can : $NX \to \mathbb{R}^n, (x, v) \mapsto x + v$.

1– Soit x dans X. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X et k fonctions lisses $e_i : U \to \mathbb{R}^n$ tels que pour tout y dans U, $(e_1(y), \ldots, e_k(y))$ est une base de $T_y X$.

2– En déduire que NX est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et préciser sa dimension.

3– Montrer que can est un difféomorphisme local au voisinage de tout $(x, 0)$, avec $x \in X$.

4– On note $N^\varepsilon X$ l'ouvert de NX des points (x, v) tels que $|v| < \varepsilon$, où $|v|$ est la norme euclidienne de v. On suppose X compact. Montrer qu'il existe ε tel que can : $N^\varepsilon X \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme sur un voisinage ouvert de X.

5– L'application can est-elle un difféomorphisme local au voisinage de tout (x, v) de NX ?

Solution :

1– Soit $\varphi : (\mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}^n, x)$ une paramétrisation locale de X. En notant U l'ouvert de X, image de φ, on pose $e_i(y) = d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi(E_i)$, où $(E_1, \ldots, E_k)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

2– On se place sur le voisinage ouvert U de x construit à la question précédente et on considère $NX \cap (U \times \mathbb{R}^n)$, ouvert de NX. Soit $f : (U, x) \to (\mathbb{R}^{n-k}, 0)$ une submersion définissant X, quitte à réduire U. On définit $g : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ par

$$g : (x, v) \mapsto (f(x), < e_1(x), v >, \ldots, < e_k(x), v >),$$

où $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$. La différentielle de g est triangulaire. Le premier bloc diagonal est donné par la différentielle de f, qui est surjective par hypothèse. Le deuxième bloc diagonal est l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ donnée par $h \mapsto (< e_1(x), h >, \ldots, < e_k(x), h >)$ qui est surjective, car les $e_i(x)$ sont linéairement indépendants. Donc, g est une submersion, définissant $NX \cap (U \times \mathbb{R}^n)$. Donc, NX est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Sa dimension est $2n - ((n - k) + k) = n$.

3– L'application can est $\mathcal{C}^\infty$, comme restriction de l'application donnée par la même formule sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En un point $(x, 0)$ de NX, on peut identifier le tangent $T_{(x,0)}NX$ à $T_x X \oplus (T_x X)^{\perp \mathbb{R}^n}$ (utiliser par exemple l'application g, $d_{(x,0)}g$ est diagonale). Comme $\mathbb{R}^n = T_x X \oplus (T_x X)^{\perp \mathbb{R}^n}$, la différentielle de can en $(x, 0)$ peut être vue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Avec ces identifications, cette différentielle vaut simplement l'identité.

4– Par compacité de X, il existe un ε_1 tel que can : $N^{\varepsilon_1} X \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local en tout point. En particulier, son image est ouverte. Montrons que, quitte à réduire ε_1, can devient injective. On considère des suites (x_n, v_n) et (y_n, w_n) telles que v_n et w_n tendent vers 0 et $x_n + v_n = y_n + w_n$. Comme X est compact, on peut supposer que x_n et y_n convergent. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, leur limite est la même. Appelons-la x_0. Alors, on a une contradiction avec le fait que can est un difféomorphisme local sur un voisinage de $(x_0, 0)$. Donc, il existe ε tel que can : $N^\varepsilon X \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme sur un voisinage ouvert de X dans $\mathbb{R}^n$.

5– Non ! On considère le cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. Alors can n'est pas injective au voisinage de tout $(x, -x) \in N\mathbb{S}^1$ puisque $\mathrm{can}(x, -x) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{S}^1$.

3. Revêtement de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathbb{RP}^n$

Soit $\mathbb{RP}^n$ l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$. On l'identifie à l'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang 1 dans les matrices carrées de taille $(n+1, n+1)$, ce qui lui confère une structure de sous-variété (cf. cours). On note π l'application de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{RP}^n$, qui à v associe la droite engendrée par v.

1– Montrer que π est $\mathcal{C}^\infty$.

2– Montrer que π est un revêtement à deux feuillets, au sens suivant : pour tout x dans $\mathbb{RP}^n$, il existe un voisinage ouvert U contenant x et un difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \{1, 2\}$ tels que $\mathrm{pr}_1 \circ \varphi = \pi$. Ici, $\mathrm{pr}_1 : U \times \{1, 2\} \to U$ désigne la première projection.

Solution :

1– On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ comme des matrices colonnes à $n+1$ lignes. Alors, l'application π est donnée par le produit matriciel

$$\pi : v \mapsto {}^t v v.$$

Donc, π est bien $\mathcal{C}^\infty$.

2– On va d'abord montrer que π est un difféomorphisme local. Comme la dimension de $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{RP}^n$ est la même, égale à n, il suffit de montrer que π est une immersion. On a vu que $\pi(v) = (v_i v_j)_{i,j}$. Donc, $d_v\pi(h) = (v_i h_j + h_i v_j)_{i,j}$. On note I l'ensemble des indices i tels que $v_i = 0$ et J son complémentaire. Comme $v \neq 0$, J n'est pas vide. Si $d_v\pi(h) = 0$, alors en considérant les termes diagonaux, il vient $h_j = 0$, pour tout j dans J. Soit maintenant i dans I et j_0 quelconque dans J. Alors $v_i h_{j_0} + h_i v_{j_0} = 0$, d'où $h_i = 0$. Donc, π est une immersion, donc un difféomorphisme local.

Vu l'interprétation géométrique de π, chaque élément de $\mathbb{RP}^n$ a deux antécédents par π (remarquer aussi que la surjectivité de π provient abstraitement du fait que c'est une application ouverte, car un difféomorphisme local, et fermée, car $\mathbb{S}^n$ est compact). Soit $x \in \mathbb{RP}^n$. Notons y_1, y_2 ses deux antécédents. Comme π est un difféomorphisme local, il existe deux ouverts disjoints V_1 et V_2 autour de y_1, y_2 tels que $\pi : V_i \to \pi(V_i)$ est un difféomorphisme. Quitte à réduire les V_i, on peut supposer que leur image par π est la même, égale à un ouvert U, voisinage de x. On a donc $\pi^{-1}(U) = V_1 \coprod V_2$. On définit φ sur V_i par $\varphi(z) = (\pi(z), i)$.

4. Grassmanniennes et matrices

On note $G(k,n)$ la Grassmannienne des k-plans dans $\mathbb{R}^n$, vus comme projecteurs orthogonaux de rang k dans les matrices (n,n).

1– Montrer que si E est un point de $G(k,n)$, il existe un voisinage ouvert U de E dans $G(k,n)$ et des applications $e_1, \dots, e_k : U \to \mathbb{R}^n$ tels que pour tout F dans U, $(e_1(F), \dots, e_k(F))$ soit une base de F.

2– Soit L_0 une matrice (k,n) et E_0 dans $G(k,n)$. On suppose que $L_{0|E_0}$ est un isomorphisme. Montrer que si L est proche de L_0 et si E est proche de E_0, alors $L_{|E}$ est un isomorphisme.

3– Montrer qu'il existe une unique application locale $S : M_{k,n}(\mathbb{R}) \times G(k,n) \to M_{n,k}(\mathbb{R})$ définie sur un voisinage de (L_0, E_0) telle que, pour tout (L,E) dans ce voisinage,

$$L \circ S(L,E) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$$

et telle que l'image de $S(L,E)$ soit égale à E.

Solution :

1– E est représenté par un projecteur orthogonal π de rang k dans $M_n(\mathbb{R})$. On considère k colonnes indépendantes $C_{i_1}, \dots, C_{i_k}$ de π. Elles forment une base de E. Si F est proche de E, les colonnes $C_{i_1}, \dots, C_{i_k}$ sont encore indépendantes et forment une base de F.

2– Sur un voisinage U de E_0, on peut définir des fonctions $e_i : U \to \mathbb{R}^n$ telles que $(e_i(E))_{i=1}^k$ est une base de E. On écrit l'application linéaire $L_{|E} : E \to \mathbb{R}^k$ dans cette base (pour l'espace de départ). La matrice dépend de façon $\mathcal{C}^\infty$ de L et E. Comme c'est un isomorphisme pour L_0 et E_0, c'est un isomorphisme pour L et E proches de L_0 et E_0.

3– L'unicité est évidente, puisque $S(L,E)$ est l'inverse de $L_{|E}$, vu comme application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (plutôt que E). On a écrit $L_{|E}$ dans la base des $e_i(E)$. L'inverse de cette matrice, qu'on note $(L_{|E})^{-1}$ dépend de façon $\mathcal{C}^\infty$ de L et E. De plus, cette matrice (k,k) définit une application linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ (i.e. une matrice (n,k)) en écrivant les coordonnées des $e_i(E)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (i.e. on multiplie $(L_{|E})^{-1}$ à gauche par la matrice (n,k) dont les colonnes sont les $e_i(E)$). On note $S(L,E)$ cette application linéaire ; elle dépend de façon lisse de L et E et vérifie la propriété demandée, par construction.