Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$5

Corrigé

Exercice 1

1. La fonction u étant bornée, l'hypothèse sur K implique que, pour tout x, la fonction $y \to K(x,y)u(y)$ est dans L^1, d'intégrale bornée par $A||u||_\infty$.
Donc $Pu(x)$ est bien défini et $|Pu(x)| \leq A||u||_\infty$.
2. a) On utilise, dans la définition de $Pu(x)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions $f(y) = \sqrt{|K(x,y)|}$ et $g(y) = \sqrt{|K(x,y)|}u(y)$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
|Pu(x)|^2 &= \left|\int f(y)g(y)dy\right|^2 \\
&\leq \left(\int |f(y)|^2 dy\right)\left(\int |g(y)|^2 dy\right) \\
&= \left(\int |K(x,y)|dy\right)\left(\int |K(x,y)|\,|u(y)|^2 dy\right) \\
&\leq A \int |K(x,y)|\,|u(y)|^2 dy
\end{aligned}$$

b) En intégrant sur x l'inégalité précédente, on trouve :

$$||Pu||_2^2 \leq A \int |K(x,y)|\,|u(y)|^2 dy dx \leq A^2 \int |u(y)|^2 dy = A^2 ||u||_2^2$$

L'application P est donc uniformément continue, de norme au plus A, de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ vers L^2. Par densité, elle admet donc une unique extension continue de L^2 vers L^2, dont la norme est toujours au plus A.

Exercice 2

1. a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Op}(a)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi)e^{ix.\xi}\hat{u}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi)e^{ix.\xi}\left(\int e^{-iy.\xi}u(y)dy\right)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int a(x,\xi)e^{i(x-y).\xi}u(y)dyd\xi
\end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme voulue, pour $K(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int a(x,\xi) e^{i(x-y).\xi} d\xi$.
Come $|a(x,\xi)|$ est majorée par $C(1+||\xi||)^{-(n+1)}$, ce qui est une fonction intégrable, et comme u est de Schwartz, il n'y a pas de problème de convergence.
b) Puisque $a \in S^{-(n+1)}$:

$$\begin{aligned} |K(x,y)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int |a(x,\xi)| d\xi \\ &\leq C \int (1+|\xi|)^{-(n+1)} d\xi \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Donc K est bornée.
Pour tout $j \leq n$, d'après les propriétés classiques de la transformée de Fourier :

$$(x_j - y_j)^{n+1} K(x,y) = i^{n+1} \frac{1}{(2\pi)^n} \int \partial_{\xi_j}^{n+1} a(x,\xi) e^{i(x-y).\xi} d\xi$$

Donc :

$$\begin{aligned} |x_j - y_j|^{n+1} |K(x,y)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int |\partial_{\xi_j}^{n+1} a(x,\xi)| d\xi \\ &\leq C \int (1+|\xi|)^{-2(n+1)} d\xi \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Donc $(x,y) \to |x_j - y_j|^{n+1} K(x,y)$ est bornée. Cela entraîne que la fonction $(x,y) \to ||x - y||_{n+1}^{n+1} K(x,y)$ est bornée. Par équivalence des normes, $(x,y) \to ||x-y||_2^{n+1} K(x,y)$ est bornée. Comme on a vu que K était également bornée, $(x,y) \to (1+||x-y||^{n+1}) K(x,y)$ est une fonction bornée.
c) D'après la question b), $|K|$ est majorée par $C(1+||x-y||^{n+1})^{-1}$ pour une certaine constante $C > 0$. Donc :

$$\sup_x \int |K(x,y)| dy \leq C \int \frac{1}{1+||t||^{n+1}} dt \qquad \sup_y \int |K(x,y)| dy \leq C \int \frac{1}{1+||t||^{n+1}} dt$$

D'après le lemme de Schur vu à l'exercice 1, $\mathrm{Op}(a)$ s'étend de manière unique en un opérateur borné de L^2 vers L^2.

2. Pour $k = 0$, c'est la question 1.
On suppose maintenant que c'est démontré pour $k - 1 \geq 0$ et on le démontre pour $k \leq n$. On suppose donc $a \in S^{k-(n+1)}$.
D'après les résultats de calcul symbolique vus en cours, $\mathrm{Op}(a)^*$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $k - (n+1)$. De plus, $\mathrm{Op}(a)^* \mathrm{Op}(a)$ est la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $k - (n+1)$. C'est donc un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $2(k - (n+1)) \leq (k-1) - (n+1)$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Op}(a)^* \mathrm{Op}(a)$ est continu de L^2 vers L^2. D'après l'indication, $\mathrm{Op}(a)$ aussi.

3. a) Soit $M > 2\sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n} |a(x,\xi)|^2$.
On pose $c(x,\xi) = \sqrt{M - |a(x,\xi)|^2}$. Vérifions qu'il s'agit d'un symbole d'ordre 0. Pour tous multi-indices α, β, $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c$ est une somme de fonctions de la forme :

$$\frac{\prod_{j=1}^{s}(\partial_x^{\alpha_j}\partial_\xi^{\beta_j} a)\prod_{j=1}^{s'}\overline{(\partial_x^{\alpha'_j}\partial_\xi^{\beta'_j} a)}}{(M-|a|^2)^r} \tag{1}$$

avec $r \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + ... + \alpha_s + \alpha'_1 + ... + \alpha'_{s'} = \alpha$ et $\beta_1 + ... + \beta_s + \beta'_1 + ... + \beta'_{s'} = \beta$.
La fonction $M - |a|^2$ est à valeurs dans $[M/2; M]$. Elle est donc majorée et minorée. Le fait que a appartienne à S^0 implique donc qu'un terme de la forme (1) est majoré par :

$$C(1+||\xi||)^{-|\beta_1|-...-|\beta'_{s'}|} = C(1+||\xi||)^{-|\beta|}$$

ce qui montre $c \in S^0$.
D'après les résultats du cours sur le calcul symbolique, $\mathrm{Op}(c)^*\mathrm{Op}(c) = \mathrm{Op}(\overline{c})\mathrm{Op}(c) + R_1 = \mathrm{Op}(|c|^2) + R_2 + R_1$ avec $R_1, R_2 \in \mathrm{Op}(S^{-1})$.
De plus, $\mathrm{Op}(a)^*\mathrm{Op}(a) = \mathrm{Op}(|a|^2) + R_3$ avec $R_3 \in \mathrm{Op}(S^{-1})$.
Cela entraîne :

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(c)^*\mathrm{Op}(c) &= \mathrm{Op}(M - |a|^2) + R_2 + R_1\\ &= M\mathrm{Id} - \mathrm{Op}(|a|^2) + R_2 + R_1\\ &= M\mathrm{Id} - \mathrm{Op}(a)^*\mathrm{Op}(a) + R_3 + R_2 + R_1\end{aligned}$$

et on a bien $R_3 + R_2 + R_1 \in \mathrm{Op}(S^{-1})$.
b) D'après la question 2. appliquée à $k = n$, R est continu de L^2 vers L^2. Pour toute fonction u, on a donc :

$$\begin{aligned}||\mathrm{Op}(a)u||_2^2 &= \langle \mathrm{Op}(a)u, \mathrm{Op}(a)u\rangle\\ &= \langle u, \mathrm{Op}(a)^*\mathrm{Op}(a)u\rangle\\ &= \langle u, Mu - \mathrm{Op}(c)^*\mathrm{Op}(c)u + Ru\rangle\\ &= M||u||^2 - ||\mathrm{Op}(c)u||^2 + \langle u, Ru\rangle\\ &\le M||u||^2 + \langle u, Ru\rangle\\ &\le (M + ||R||_{L^2\to L^2})||u||^2\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Op}(a)$ est continu sur L^2.

Exercice 3

1. Supposons $a \in S^m$ pour un certain $m > 0$. Nous allons montrer que a appartient à $S^{m'}$, avec $m' = m - 1/4$ si $m \ge 1$ et $m' = 3m/4$ si $m \le 1$. En itérant, on obtiendra qu'il existe une suite $(m_s)_{s\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro telle que, pour tout s, $a \in S^{m_s}$. Cela entraînera le résultat.

Comme dans le cours sur la transformée en paquets d'onde, on définit :

$$\begin{aligned} & \phi_{p,q}^h : x \in \mathbb{R}^n \to \left(\frac{h}{4\pi^3}\right)^{n/4} e^{ip(x-q)} e^{-\frac{h}{2}||x-q||^2} \\ \iff \qquad & \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \hat{\phi}_{p,q}^h(\xi) = \left(\frac{1}{\pi h}\right)^{n/4} e^{-i\xi q} e^{-\frac{1}{2h}||\xi-p||^2} \end{aligned}$$

Supposons pour le moment p, q, h fixés. On écrit :

$$a(x,\xi) = a(q,p) + b(x,\xi) \tag{2}$$

avec, si $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} |b(x,\xi)| &= |a(q,p) - a(x,\xi)| \\ &\leq |a(q,p) - a(q,\xi)| + |a(q,\xi) - a(x,\xi)| \\ &= ||p-\xi|| \sup_{\xi' \in [p,\xi]} |\partial_\xi a(q,\xi')| + ||q-x|| \sup_{x' \in [q,x]} |\partial_x a(x',\xi)| \\ &\leq C\left(||p-\xi|| \sup_{\xi' \in [p,\xi]} (1+||\xi'||)^{m-1} + ||q-x|| \sup_{x' \in [q,x]} (1+||\xi||)^m\right) \\ &\leq C\left(||p-\xi||(1+||p||+||\xi-p||)^{m-1} + ||q-x||(1+||p||+||\xi-p||)^m\right) \\ &\leq C'\left(||p-\xi||(1+||p||^{m-1}+||\xi-p||^{m-1}) + ||q-x||(1+||p||^m+||\xi-p||^m)\right) \end{aligned}$$

Lorsque $m < 1$, le passage de la quatrième à la cinquième ligne n'est plus vrai, car $m-1 < 0$. Dans ce cas, on a en revanche $\sup_{\xi' \in [p;\xi]}(1+||\xi'||)^{m-1} \leq 1 \leq 1+||p||^{m-1} \leq ||\xi-p||^{m-1}$ donc la conclusion reste vraie.

On a :

$$\langle \phi_{p,q}^h, \mathrm{Op}(a(p,q))\phi_{p,q}^h \rangle = a(p,q)||\phi_{p,q}^h||_2^2 = \frac{a(p,q)}{(2\pi)^n} \tag{3}$$

De plus :

$$\begin{aligned} & |\langle \phi_{p,q}^h, \mathrm{Op}(b)\phi_{p,q}^h \rangle| \\ &= \left| \frac{1}{(2\pi^2)^{n/2}} \int e^{-\frac{h}{2}||x-q||^2} e^{-\frac{1}{2h}||\xi-p||^2} e^{i(\xi-p).(x-q)} b(x,\xi) dx d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi^2)^{n/2}} \int e^{-\frac{h}{2}||x-q||^2} e^{-\frac{1}{2h}||\xi-p||^2} |b(x,\xi)| dx d\xi \\ &\leq C'' \int e^{-\frac{h}{2}||x-q||^2} e^{-\frac{1}{2h}||\xi-p||^2} \left(||p-\xi||(1+||p||^{m-1}+||\xi-p||^{m-1})\right. \\ &\qquad\qquad \left. + ||q-x||(1+||p||^m+||\xi-p||^m)\right) dx d\xi \\ &= C_1 h^{1/2} + C_2 h^{1/2}||p||^{m-1} + C_3 h^{m/2} + C_4 h^{-1/2} + C_5 h^{-1/2}||p||^m + C_6 h^{(m-1)/2} \end{aligned}$$

Si on choisit par exemple $h = ||p||^{\min(1,m)}$, on obtient :

$$|\langle \phi_{p,q}^h, \mathrm{Op}(b)\phi_{p,q}^h \rangle| = O\left(||p||^\alpha\right) \tag{4}$$

avec $\alpha = m - 1/2$ si $m \geq 1$ et $\alpha = m/2$ si $m \leq 1$.
En combinant (2), (3) et (4), on trouve, pour $h = ||p||^{\min(1,m)}$:

$$\langle \phi_{p,q}^h, \mathrm{Op}(a)\phi_{p,q}^h \rangle = \frac{a(p,q)}{(2\pi)^n} + O\left(||p||^\alpha\right)$$

Comme $\mathrm{Op}(a)$ est continue sur L^2, il existe une constante M telle que, pour tous p, q, h :

$$|\langle \phi_{p,q}^h, \mathrm{Op}(a)\phi_{p,q}^h \rangle| \leq M||\phi_{p,q}^h||^2 = \frac{M}{(2\pi)^n}$$

ce qui entraîne, pour tous p, q :

$$|a(p,q)| \leq M + O\left(||p||^\alpha\right)$$

D'après le résultat rappelé en indication, a appartient donc à $S^{\alpha+\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$. En particulier, $a \in S^{m'}$, avec $m' = m - 1/4$ si $m \geq 1$ et $m' = 3m/4$ si $m \leq 1$.
2. On vérifie que c'est un symbole en calculant les dérivées. L'opérateur associé à ce symbole est un multiplicateur de Fourier de module 1 ; il est donc borné de L^2 vers L^2, de norme au plus 1.
En revanche :

$$\partial_{\xi_j} a(x,\xi) = 4\log(1+||\xi||^2)\frac{\xi_j}{1+||\xi||^2} e^{i\log(1+||\xi||^2)^2} \neq O((1+||\xi||)^{-1})$$

donc $a \notin S^0$.

Exercice 4

1. Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, telle que $\chi(0,0) = 1$.
D'après la définition des intégrales oscillantes :

$$\begin{aligned}
\int e^{-iy.x} x_j a(x,y) dx dy &= \lim_{\epsilon \to 0} \int e^{-iy.x} x_j a(x,y) \chi(\epsilon x, \epsilon y) dx dy \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} i \int \partial_{y_j}[e^{-iy.x}] a(x,y) \chi(\epsilon x, \epsilon y) dx dy \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} -i \int e^{-iy.x} \partial_{y_j}[a(x,y)\chi(\epsilon x, \epsilon y)] dx dy \\
&= -i \lim_{\epsilon \to 0} \int e^{-iy.x} \partial_{y_j} a(x,y) \chi(\epsilon x, \epsilon y) dx dy \\
&\quad - i \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \int e^{-iy.x} a(x,y) \partial_{y_j}\chi(\epsilon x, \epsilon y) dx dy
\end{aligned}$$

La première limite vaut $-i \int e^{-iy.x} \partial_{y_j} a(x,y) dx dy$ (par définition de cette intégrale oscillante).
Pour le deuxième terme, toujours par la définition des intégrales oscillantes :

$$-i \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \int e^{-iy.x} a(x,y) \partial_{y_j}\chi(\epsilon x, \epsilon y) dx dy = -i \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon\, \partial_{y_j}\chi(0,0) \int e^{-iy.x} a(x,y) dx dy = 0$$

Cela donne le résultat voulu.
2. On se contente de montrer $\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}a(x)dydx = a(0)$. Par symétrie entre les variables y et x, cela suffit.
Lorsque m est suffisamment négatif, a est dans L^1 et $\hat{a}$ est également dans L^1. On a alors :

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}a(x)dydx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{a}(y)dy = a(0)$$

Pour conclure, il suffit donc de démontrer que si l'égalité est vraie pour $a \in A^m$, alors elle est vraie pour $a \in A^{m+1}$. Supposons alors qu'elle est vraie sur $a \in A^m$ et supposons fixé $a \in A^{m+1}$. Posons $b(x) = a(x)(1+||x||^2)^{-1}$. On a $b \in A^{m-1} \subset A^m$. En utilisant la question 1. :

$$\begin{aligned}
\int e^{-iy.x}a(x)dydx &= \int e^{-iy.x}b(x)dydx + \sum_j \int e^{-iy.x}x_j^2 b(x)dydx \\
&= b(0) - i\sum_j \int e^{-iy.x}\partial_{y_j}\left[x_j b(x)\right]dydx \\
&= b(0) \\
&= a(0)
\end{aligned}$$

3. Lorsque $\beta = 0$, c'est une conséquence de la question 2., appliquée à $a(y) = y^\alpha/(\alpha!)$.
Procédons maintenant par récurrence sur $|\beta|$, en utilisant la question 1. On note $\delta_j = (0,...,0,1,0,...,0)$ (avec le 1 en position j).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\frac{y^\alpha x^{\beta+\delta_j}}{\alpha!(\beta+\delta_j)!}dydx &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}x_j\frac{y^\alpha x^\beta}{\alpha!(\beta+\delta_j)!}dydx \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\partial_{y_j}\left[\frac{y^\alpha x^\beta}{\alpha!(\beta+\delta_j)!}\right]dydx \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\alpha_j\frac{y^{\alpha-\delta_j}x^\beta}{\alpha!(\beta+\delta_j)!}dydx \\
&= 1_{\alpha_j>0}\frac{-i}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}\frac{y^{\alpha-\delta_j}x^\beta}{(\alpha-\delta_j)!(\beta+\delta_j)!}dydx \\
&= 1_{\alpha_j>0}\frac{(-i)^{|\alpha-\delta_j|+1}}{(\beta+\delta_j)!}1_{\beta=\alpha-\delta_j} \\
&= \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!}1_{\beta+\delta_j=\alpha}
\end{aligned}$$

Exercice 5

1. a) Si $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\psi \circ R} = \hat{\psi}\circ R$. Quitte à précomposer ψ par une rotation bien choisie, on peut donc supposer que $(0,...,0,1)$ appartient au support de ψ.

Si on suppose de plus que le diamètre du support est strictement inférieur à 1, le fait que le support contienne $(0, ..., 0, 1)$ implique que le support est inclus dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*$.
b) L'application ϕ réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{n-1}$ vers $S^{n-1} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*)$. Avec les hypothèses de la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \psi(x) e^{-ix.\xi} dx &= \int_{S^{n-1} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^*)} \psi(x) e^{-ix.\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(\phi(x)) e^{-i\phi(x).\xi} |\det \phi(x)| dx\end{aligned}$$

En posant $\tilde{\psi}(x) = \psi(\phi(x)) |\det \phi(x)|$, on a le résultat voulu. Cette fonction est bien $\mathcal{C}^\infty$ (car ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ et son déterminant ne s'annule pas). Elle est à support compact car ψ l'est.
c) On pose $\Phi(x) = \phi(x).\xi/||\xi||$. Montrons que, si ψ a un support de diamètre assez petit et si ξ est dans un voisinage conique convenable de ξ_0, alors $\nabla\Phi$ ne s'annule pas sur le support de $\tilde{\psi}$.

$$\nabla\Phi(x) = {}^t d\phi(x).(\xi/||\xi||)$$

Pour tous $j \leq n-1$ et $k \leq n$:

$$\partial_{x_j} \phi_k = \frac{\delta_{j,k}}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + 1}} - \frac{x_k x_j}{(x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + 1)^{3/2}}$$

(où l'on note $x_n = 1$).
Cela entraîne, pour tout $j \leq n-1$:

$$(\nabla\Phi(x))_j = \frac{1}{||\xi||} \left(\frac{\xi_j}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + 1}} - \frac{\langle \xi, (x_1, ..., x_{n-1}, 1) \rangle x_j}{(x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + 1)^{3/2}} \right)$$

On vérifie à partir de cette expression que le fait que le gradient soit nul est équivalent à :

$$\xi \text{ est colinéaire à } \phi(x) \tag{5}$$

Si le support de ψ est de diamètre ϵ assez petit, alors $|\phi(x) - (0, ..., 0, 1)| \leq \epsilon$ pour tout x dans le support de $\tilde{\psi}$ (à cause de l'expression qu'on a trouvée pour $\tilde{\psi}$ à la question précédente et du fait que $(0, ..., 0, 1)$ appartient au support de ψ). Comme ξ_0 n'est pas colinéaire à $(0, ..., 0, 1)$, si le support de ψ est de diamètre assez petit, la relation (5) n'est jamais vérifiée pour ξ dans un voisinage conique de ξ_0 et x dans le support de $\tilde{\psi}$. Donc $\nabla\Phi$ ne s'annule pas sur le support de $\tilde{\psi}$.
D'après le lemme de la phase stationnaire, avec $\lambda = ||\xi||$:

$$\left| \int \psi(x) e^{-ix.\xi} dx \right| = \left| \int \tilde{\psi}(x) e^{-i\lambda\Phi(x)} dx \right| = O(\lambda^{-N}) = O(||\xi||^{-N})$$

d) En réutilisant le calcul de la question précédente, on voit que :

$$(\nabla\Phi(x))_1 = \frac{1}{||\xi||} \frac{\xi_1 (x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 + 1) - \langle \xi, (0, x_2, ..., x_{n-1}, 1) \rangle x_1}{(x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + 1)^{3/2}}$$

et donc :

$$\partial_{11}\Phi(x) = -\frac{3(\nabla\Phi(x))_1 x_1}{x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + 1} - \frac{1}{||\xi||}\frac{\langle \xi, (0, x_2, ..., x_{n-1}, 1)\rangle}{(x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + 1)^{3/2}}$$

En $\xi = \xi_0 = \pm(0, ..., 0, 1)$ et $\phi(x) = (0, ..., 0, 1)$:

$$\partial_{11}\Phi(x) = \pm 1$$

donc si le support de ψ est de diamètre assez petit et si ξ varie dans un voisinage conique également assez petit de ξ_0, $\partial_{11}\Phi$ ne s'annule pas sur le support de $\tilde{\psi}$.
Le théorème admis entraîne donc le résultat voulu.
e) D'après les questions c) et d), pour tout ξ_0 non-nul, il existe un voisinage conique de ξ_0 sur lequel la propriété (1) est vérifiée, à condition que $\mathrm{Supp}(\psi)$ soit de diamètre assez petit. Par compacité, on peut choisir un nombre fini de ces voisinages coniques dont l'union vaut $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Si le diamètre du support de ψ est assez petit, la propriété (1) est alors vérifiée sur chacun des voisinages coniques, donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

2. On utilise une partition de l'unité pour écrire ψ comme une somme de fonctions à supports compacts, chaque fonction de la somme ayant un support assez petit pour vérifier la propriété (1).
3. a) Pour toutes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(S^{n-1})$:

$$\begin{aligned}
\langle g, Rf\rangle &= \int_{S^{n-1}} \overline{g(\xi)}(Rf)(\xi)d\xi \\
&= \int_{S^{n-1}} \overline{g(\xi)}\hat{f}(\xi)d\xi \\
&= \int_{S^{n-1}} \overline{g(\xi)}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}dx\right)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left(\int_{S^{n-1}} \overline{g(\xi)}e^{-ix.\xi}d\xi\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{R^*g(x)}dx \\
&= \langle R^*g, f\rangle
\end{aligned}$$

Pour $g = Rf$, on a le résultat.
b) On calcule :

$$\begin{aligned}
R^*Rf(x) &= \int_{S^{n-1}} e^{ix.\xi}Rf(\xi)d\xi \\
&= \int_{S^{n-1}} e^{ix.\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y)e^{-iy.\xi}dy\right)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y)\left(\int_{S^{n-1}} e^{i(x-y).\xi}d\xi\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(y)K(x-y)dy \\
&= f \star K(x)
\end{aligned}$$

si on pose $K(x') = \int_{S^{n-1}} e^{ix'.\xi} d\xi$.
D'après la question 2. appliquée à $\psi = 1$, la fonction K vérifie la majoration voulue.
c) La majoration de la question précédente entraîne que K appartient à L^r pour tout $r > 2n$.
D'après l'inégalité de Young, l'application R^*R est donc continue de $L^q(\mathbb{R}^n)$ vers $L^s(\mathbb{R}^n)$ pour tous p, q tels que $1 + 1/s < 1/q + 1/(2n)$.
En prenant $q = p$ et $s = p'$, on obtient que R^*R est continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ vers $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ dès que :

$$2 < 2/p + 1/(2n)$$

ce qui est vrai si $p < (1 - 1/(4n))^{-1}$.
d) D'après la question précédente et la question 3.a), si p est assez proche de 1, il existe une constante C telle que, pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$||Rf||_2^2 \leq ||R^*Rf||_{p'} ||f||_p \leq C||f||_p^2$$

c'est-à-dire $||Rf||_2 \leq \sqrt{C}||f||_p$.