

Aspects rigoureux de la mécanique statistique à l'équilibre

Corrigé du TD 5

Jérémie Bouttier et Guilhem Semerjian

avril-mai 2015

1 Comptage de pavages et lemme LGV

1.1 Lemme LGV

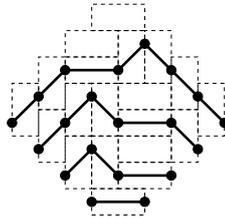
Voir notes de cours.

1.2 Pavages par losanges d'un hexagone

Voir notes de cours.

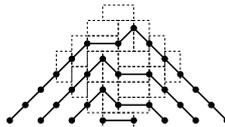
1.3 Pavages par dominos du diamant aztèque

1. On obtient



2. Les chemins peuvent visiter tous les sommets de la forme $(j - i, -n - \frac{1}{2} + i + j)$ avec $0 \leq i, j \leq n$ non simultanément nuls. Il y a trois types de pas : $(1, 1)$, $(2, 0)$ et $(1, -1)$. Les points de départ sont $(-i, -n - \frac{1}{2} + i)$, $1 \leq i \leq n$, et les points d'arrivée $(j, -n - \frac{1}{2} + j)$, $1 \leq j \leq n$.

3. On prolonge les chemins comme ceci



les parties ajoutées étant «figées». Quitte à traduire les coordonnées de $(0, n + \frac{1}{2})$, la proposition s'ensuit.

4. On est sur le graphe $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ dont les arêtes sont données par les pas ci-dessus. Avec l'orientation de gauche à droite, ce graphe est manifestement acyclique et planaire :



On peut ainsi appliquer le lemme de Lindström-Gessel-Viennot, dans la situation où toute configuration de chemins non-intersectants relie précisément la source $(-2i+1, 0)$ au puits $(2i-1, 0)$ (i.e. le déterminant s'exprime comme une somme sans signes). Comme le nombre de chemins de Schröder reliant $(-2i+1, 0)$ à $(2j-1, 0)$ est r_{i+j-1} , comme on le voit par translation, l'égalité voulue s'ensuit par la question précédente.

5. Clairement $r_0 = 1$. Considérons un chemin de Schröder positif menant à $(2n, 0)$ avec $n \geq 1$: on décompose celui-ci au premier sommet visité de la forme $(\ell, 0)$ avec $\ell > 0$. On peut observer que ℓ est nécessairement pair car tout chemin de Schröder passant par $(0, 0)$ ne visite que des sommets dont la somme des coordonnées est paire.

Si le premier pas du chemin est un pas $(2, 0)$, alors $\ell = 2$, et après translation la suite du chemin est un chemin de Schröder positif de $(0, 0)$ à $(2n-2, 0)$. Sinon, le premier pas du chemin est nécessairement un pas $(1, 1)$, et le pas précédent $(\ell, 0)$ est nécessairement un pas $(1, -1)$. La partie du chemin allant de $(1, 1)$ à $(\ell-1, 1)$ donne par translation un chemin de Schröder positif allant de $(0, 0)$ à $(\ell-2, 0)$, tandis que la partie du chemin allant de $(\ell, 0)$ à $(2n, 0)$ donne un deuxième chemin de Schröder. Cette décomposition est clairement bijective, et donne la relation voulue en prenant $k = \frac{\ell-2}{2}$.

6. On multiplie la relation précédente par z^n et on somme sur $n \geq 0$. Le rayon de convergence est fini car on a par exemple la majoration $r_n \leq 3^n$.
7. On reprend la même décomposition qu'à la question 5 et on observe que, désormais, le premier pas ne peut pas être $(2, 0)$. C'est donc le second cas qui s'applique et on observe qu'il n'y a pas de contrainte supplémentaire sur la première partie du chemin, tandis que la seconde partie est contrainte à ne jamais visiter consécutivement deux sommets d'ordonnée nulle.
8. En multipliant par z^n et en sommant sur n , il vient la relation

$$s(z) = 1 + z r(z) s(z)$$

d'où on déduit

$$s(z) = \frac{1}{1 - z r(z)}.$$

Or, par la relation de la question 6, on a

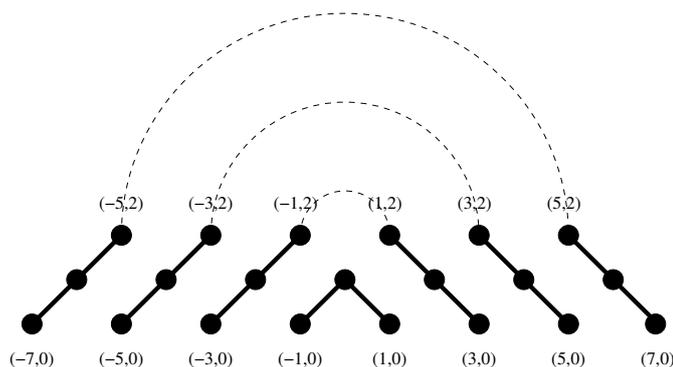
$$z = \frac{r(z) - 1}{r(z)(r(z) + 1)}$$

et en substituant dans la relation précédente il vient

$$s(z) = \frac{r(z) + 1}{2}$$

d'où on déduit que $s_0 = r_0 = 1$ et $s_n = \frac{r_n}{2}$ pour $n \geq 1$.

9. $\det_{1 \leq i, j \leq n} s_{i+j-1}$ compte des configurations de n chemins de Schröder positifs non-intersectants reliant les sources $(-2i+1, 0)$, $1 \leq i \leq n$, aux puits $(2i-1, 0)$, $1 \leq i \leq n$, ne visitant jamais consécutivement deux sommets d'ordonnée nulle. En particulier, le chemin reliant $(-1, 0)$ à $(1, 0)$ passe nécessairement par $(0, 1)$. Par la condition de non-croisement, ceci implique que, pour tout $i \geq 2$ le chemin reliant $(-2i+1, 0)$ à $(2i-1, 0)$ commence par deux pas montants et termine par deux pas descendants, comme vu par un dessin :



Par translation de vecteur $(0, -2)$, on obtient des configurations de $n - 1$ chemins de Schröder positifs non-intersectants reliant les sources $(-2i + 1, 0)$, $1 \leq i \leq n - 1$, aux puits $(2i - 1, 0)$, $1 \leq i \leq n - 1$, telles que comptées par $\det_{1 \leq i, j \leq n-1} r_{i+j-1}$.

10. De la relation $s_n = \frac{r_n}{2}$ pour $n \geq 1$, on déduit que

$$A_n = 2^n \det_{1 \leq i, j \leq n} s_{i+j-1}$$

d'où par la question précédente

$$A_n = 2^{n-1} A_{n-1}.$$

Avec la condition initiale $A(0) = 0$ on déduit que

$$A_n = 2^{n(n+1)/2}.$$

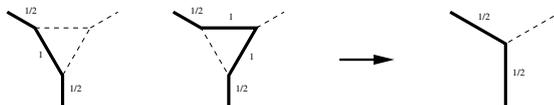
11. L'aire du diamant aztèque est $4n(n + 1)$ et l'entropie par unité d'aire est

$$\frac{\ln A_n}{4n(n + 1)} = \frac{\ln 2}{8} \simeq 0,08664$$

(pour tout $n!$). Dans la limite thermodynamique $n \rightarrow \infty$, on trouve une limite différente de celle pour les pavages du rectangle, donnée par $\frac{G}{\pi} \simeq 0,29156$. Ainsi, on est dans un modèle où l'entropie dépend des conditions au bord. Il n'y a pas de contradiction avec les théorèmes vus dans l'autre partie du cours, car les modèles des dimères ne satisfont pas leurs hypothèses (il y a des interactions de type «coeur dur»).

2 Constante de connectivité du réseau 3-12

1. On observe que le réseau hexagonal est obtenu en contractant les triangles du réseau 3-12. Considérons une marche auto-évitante de longueur n sur le réseau 3-12 : en décomposant le réseau au milieu des arêtes incidentes à deux dodécagones, les seules configurations locales possibles autour d'un triangle visité par la marche sont, à rotation près, les suivantes :



ce qui donne, après contraction, les configurations locales d'une marche auto-évitante sur le réseau hexagonal (on observera de plus que la connectivité est préservée). La longueur du morceau de marche auto-évitante étant divisée par 2 ou 3, selon le cas, via cette transformation, il s'ensuit immédiatement que la longueur de la marche obtenue est comprise entre $n/3$ et $n/2$.

2. Réciproquement, une marche auto-évitante de longueur ℓ sur le réseau hexagonal possède 2^ℓ antécédents sur le réseau 3-12, de longueurs comprises entre 2ℓ et 3ℓ . Plus précisément il y a $\binom{\ell}{k}$ marches associées de longueur $2\ell + k$, $0 \leq k \leq \ell$.
3. On déduit la relation

$$C_n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \delta_{n,2\ell+k}$$

et la relation voulue s'ensuit en multipliant par z^n et en sommant sur $n \geq 0$.

4. La constante de connectivité est donnée par

$$\Lambda^{-1} = \sup\{z \geq 0 : \bar{\chi}(z) < \infty\} = \sup\{z \geq 0 : \chi(z^2 + z^3) < \infty\}$$

or on a, comme vu en cours,

$$\sup\{t \geq 0 : \chi(t) < \infty\} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

L'application $z \mapsto z^2 + z^3$ étant un homéomorphisme croissant de \mathbb{R}_+ vers lui-même il vient immédiatement

$$\Lambda^{-2} + \Lambda^{-3} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

3 Seuil de la percolation par arêtes sur le réseau triangulaire

3.1 Préliminaires

1. Soit x un sommet de \mathbb{T} , alors $\theta_{\mathbb{T}}(p)$ est la probabilité que x soit dans une composante infinie de la percolation de paramètre p sur \mathbb{T} . Cette quantité est clairement indépendante de x par invariance par translation du réseau, et est de plus une fonction croissante de p (comme on peut le démontrer rigoureusement par couplage croissant). La définition de $\theta_{\mathbb{H}}(p)$ est identique mutatis mutandis (il faut toutefois utiliser une rotation et non une translation pour montrer que deux sommets adjacents ont même probabilité d'être dans une composante connexe infinie).
2. On a

$$p_c(\mathbb{T}) = \inf\{p \in [0, 1], \theta_{\mathbb{T}}(p) > 0\} = \sup\{p \in [0, 1], \theta_{\mathbb{T}}(p) = 0\}$$
 où l'équivalence des deux définitions vient de la croissance de $p \mapsto \theta_{\mathbb{T}}(p)$.
3. On s'attend à avoir

$$p_c(\mathbb{T}) + p_c(\mathbb{H}) = 1.$$

3.2 Transformation triangle-étoile

1. Pour G_1 , les probabilités voulues sont respectivement
 - $P_1(xyz) = p_1^3 + 3p_1^2(1 - p_1)$ (au moins deux parmi les trois arêtes doivent être ouvertes),
 - $P_1(x|y|z) = (1 - p_1)^3$ (les trois arêtes doivent être fermées),
 - $P_1(xy|z) = p_1(1 - p_1)^2$ (l'arête xy doit être ouverte et les deux autres fermées).
 Dans le cas de G_2 , elles valent
 - $P_2(xyz) = p_2^3$ (les trois arêtes doivent être ouvertes),
 - $P_2(x|y|z) = (1 - p_2)^3 + 3p_2(1 - p_2)^2$ (au plus une arête peut être ouverte),
 - $P_2(xy|z) = p_2^2(1 - p_2)$ (les arêtes xw et yw doivent être ouvertes et zw fermée).

2. On observe que la condition $P_1(xy|z) = P_2(xy|z)$ est satisfaite pour $p_2 = 1 - p_1$, et qu'alors les autres conditions sont équivalentes. Après simplification on trouve que p_1 doit être solution de l'équation

$$p_1^3 - 3p_1 + 1 = 0.$$

Par une analyse élémentaire, on voit que cette équation admet une unique solution dans $]0, 1[$.

3. Il suffit d'écrire $2 \sin(\pi/18) = e^{i\pi/18} - e^{-i\pi/18}$ et développer.
4. On peut par exemple procéder de la manière suivante :
- avec probabilité p_1^3 , on prend toutes les arêtes de G_1 et de G_2 ouvertes,
 - avec probabilité $3p_1^2(1 - p_1)$, on prend toutes les arêtes de G_2 ouvertes, et deux arêtes de G_1 ouvertes et la troisième fermée (choisie uniformément),
 - avec probabilité p_1^3 , on prend toutes les arêtes de G_1 et de G_2 fermées,
 - avec probabilité $3p_1^2(1 - p_1)$, on prend toutes les arêtes de G_1 fermées, et deux arêtes de G_2 fermées et la troisième ouverte (choisie uniformément),
 - avec probabilité $3p_1(1 - p_1)^2$, on tire uniformément au hasard un sommet parmi x, y, z , puis on prend toutes les arêtes incidentes à ce sommet dans G_1 et G_2 fermées, et les autres ouvertes.

Ces probabilités se somment bien à un en vertu de l'équation pour p_1 . De plus, on vérifie aisément que l'état des arêtes de G_1 seul a même loi que la percolation de paramètre p_1 (notamment, les arêtes sont indépendantes), et de même pour G_2 . Enfin, on observe que les deux premiers cas ci-dessus réalisent les événements $C_1(xyz)$ et $C_2(xyz)$, les deux suivants les événements $C_1(x|y|z)$ et $C_2(x|y|z)$, et le dernier $C_1(xy|z)$ et $C_2(xy|z)$ ou bien $C_1(yz|x)$ et $C_2(yz|x)$ ou bien $C_1(zx|y)$ et $C_2(zx|y)$.

5. Il suffit d'appliquer la transformation triangle-étoile à chaque triangle de \mathbb{T} «pointant vers le haut», ce qui transforme \mathbb{T} en un réseau hexagonal qui est un translaté de \mathbb{H} (les sommets de \mathbb{T} sont aussi des sommets de ce réseau hexagonal translaté, qu'on notera \mathbb{H}' pour être précis).
6. Autour de chaque triangle pointant vers le haut dans \mathbb{T} , et son étoile correspondante dans \mathbb{H}' , on tire l'état des arêtes selon le couplage de la question 4, ce qui définit globalement un couplage entre la percolation de paramètre p_1 sur \mathbb{T} et celle de paramètre p_2 sur \mathbb{H}' . Ce couplage préservant les connectivités entre les sommets de \mathbb{T} , les sommets de Γ_1 sont précisément ceux qui sont à la fois dans Γ_2 et dans \mathbb{T} . Clairement, Γ_1 est infini si et seulement si Γ_2 l'est (c'est évident dans un sens, pour l'autre on peut par exemple observer que si Γ_2 est infini alors il contient un chemin auto-évitant infini dont un sommet sur deux est dans \mathbb{T} donc dans Γ_1). Ainsi, la probabilité que Γ_1 soit infini, qui n'est autre que $\theta_{\mathbb{T}}(p_1)$, est égale à la probabilité que Γ_2 soit infini, qui n'est autre que $\theta_{\mathbb{H}}(p_2)$.
7. Si $\theta_{\mathbb{T}}(p_1) = \theta_{\mathbb{H}}(p_2) = 0$, alors $p_1 \leq p_c(\mathbb{T})$ et $p_2 \leq p_c(\mathbb{H})$, mais comme $p_1 + p_2 = 1$ et $p_c(\mathbb{T}) + p_c(\mathbb{H}) = 1$ il y a en fait égalité. Même chose si $\theta_{\mathbb{T}}(p_1) = \theta_{\mathbb{H}}(p_2) > 0$.

3.3 Dualité

1. Étant donné une configuration de percolation d'arête sur \mathbb{T} , on définit une configuration duale sur \mathbb{H} par la condition qu'une arête est ouverte si et seulement si sa duale est fermée.
2. Supposons par l'absurde que $p_c(\mathbb{T}) + p_c(\mathbb{H}) < 1$, alors il existe $p \in [0, 1]$ tel que $p > p_c(\mathbb{T})$ et $1 - p > p_c(\mathbb{H})$. On considère la percolation de paramètre p sur \mathbb{T} , et Λ_n l'hexagone de côté n centré en l'origine. Numérotions les 6 côtés de Λ_n de 1 à 6 et introduisons les événements A_i , $i = 1, \dots, 6$: «il existe un chemin ouvert infini partant du côté i et restant hors de

Λ_n ». Ces 6 évènements sont croissants, ont même probabilité, et leur union est l'évènement que Λ_n rencontre une composante connexe infinie, dont la probabilité tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$ (puisque $p > p_c(\mathbb{T})$) : par le «square-root trick», la probabilité de chacun des A_i tend alors aussi vers 1. Introduisons de même les évènements $\tilde{A}_i, i = 1, \dots, 6$: «il existe un chemin dual ouvert infini partant du côté i et restant hors de Λ_n ». Ces 6 évènements sont décroissants, ont même probabilité, et leur union est l'évènement que Λ_n rencontre une composante connexe duale infinie, dont la probabilité tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$ (puisque $1 - p > p_c(\mathbb{H})$) : de même la probabilité de chacun des \tilde{A}_i tend alors aussi vers 1. On en déduit que, par exemple, $A_1, \tilde{A}_2, A_3, \tilde{A}_4$ sont réalisés simultanément avec probabilité non-nulle pour n assez grand, et ces évènements sont de plus indépendants de l'état des arêtes à l'intérieur de Λ_n , qui sont toutes ouvertes avec probabilité positive : on en déduit qu'il y a alors avec probabilité positive au moins deux composantes connexes infinies, une contradiction.

3. Supposons par l'absurde que $p_c(\mathbb{T}) + p_c(\mathbb{H}) > 1$, alors il existe $p \in [0, 1]$ tel que $p < p_c(\mathbb{T})$ et $1 - p < p_c(\mathbb{H})$. Considérons une portion rectangulaire de \mathbb{T} de taille (proche de) $n \times n$: la probabilité qu'un sommet du bord gauche soit relié par un chemin ouvert à un sommet du bord droit est au plus $\exp(-\psi(p)n)$, donc la probabilité qu'il y ait un chemin ouvert reliant le bord gauche au bord droit est au plus $n^2 \exp(-\psi(p)n) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$. De même, la probabilité qu'il y ait un chemin dual ouvert reliant le bord du haut au bord du bas est au plus $n^2 \exp(-\tilde{\psi}(1-p)n) \rightarrow 0$. Ainsi, pour n assez grand, avec probabilité positive il n'y a ni chemin ouvert de gauche à droite ni chemin dual ouvert de haut en bas, une contradiction.