Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2018-2019 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 5 : Espérance conditionnelle

Mercredi 10 Octobre

1 Espérance conditionnelle

On rappelle que, si X est une variable aléatoire intégrable et $\mathcal{G}$ une tribu, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est l'unique variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable telle que, pour toute variable $\mathcal{G}$-mesurable positive Z, on ait

$$\mathbb{E}[ZX] = \mathbb{E}[Z\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]].$$

Exercice 1 (Quelques contre-exemples)
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathcal{F}$. Trouver des contre-exemples aux affirmations suivantes :

1. si $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$, alors X et Y sont indépendantes,
2. si $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = 0$ et $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = 0$, alors $X = 0$,
3. si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ le sont aussi.

Exercice 2 (Calculs gentils)
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d. intégrables, et $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Calculer $\mathbb{E}[S|X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1|S]$.

Exercice 3 (Calculs moins gentils)
On se donne deux réels $a, b > 0$, et (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) \;=\; b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y)\,\mathrm{d}y.$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X = n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$. Calculer ensuite $\mathbb{P}(X = n|Y)$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 4 (Espérance conditionnelle et vecteurs gaussiens)
Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien de moyenne $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}$ avec $k_{22} > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[X_1|X_2\right] = m_1 + \frac{k_{12}}{k_{22}}\left(X_2 - m_2\right).$$

Exercice 5 (Un peu d'abstract nonsense)
Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathcal{G}$ et que Y est $\mathcal{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)|\mathcal{G}\right] \;=\; \int_E g(x,Y)P_X(\mathrm{d}x)$$

où P_X désigne la loi de X. Le membre de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x,y)P_X(dx)$ (où ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Exercice 6 (Espérance conditionnelle et convergence en proba)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On suppose que $\mathbb{E}\left[X_n|\mathcal{F}_n\right]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 7 (Espérance conditionnelle et positivité)
Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que $\{\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right] > 0]\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Exercice 8 Soit X une variable intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit Y une v.a. $\mathcal{G}$-mesurable, on veut montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$. Montrer que si Π est un ensemble de parties de Ω qui contient Ω, stable par intersections finies et dont la tribu engendrée est $\mathcal{G}$, il suffit de montrer

$$\forall \pi \in \Pi \;,\; \mathbb{E}[X\mathbb{1}_\pi] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_\pi].$$

Exercice 9 (Indépendance conditionnelle)
On dit que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans un espace $(E, \mathcal{E})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de E dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)\,g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\,\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{E}$?

2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z positive $\mathcal{G}$-mesurable, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$

et aussi à : pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurable,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\sigma(\mathcal{G}, X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Exercice 10 On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s..
2. On se place maintenant dans le cas général. En étudiant des quantités de la forme $\mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{X \leq a}\right]$, montrer que $X = Y$ p.s..

2 Jolie image

Exercice 11 Que représente la jolie image ci-dessous ?