TD 6 – Absolue continuité et intégrales à paramètres

1 – Théorème de Radon-Nikodym et absolue continuité

Exercice 1. (*Contre-exemple*) Soit μ la mesure de comptage sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot \mu$. Conclure.

Corrigé.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu(A) = 0$. Alors $A = \varnothing$ et donc $\lambda(A) = 0$.
2. Supposons qu'il existe une telle fonction f. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x\}} f \, \mathrm{d}\mu = f(x).$$

   Ainsi $f = 0$ puis $\lambda = 0$. Contradiction. La mesure μ n'est pas σ-finie et le théorème de Radon-Nikodym ne s'applique pas.

Exercice 2. (*Quantification de l'absolue continuité*) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Considérons μ et ν des mesures sur $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \eta \Rightarrow \nu(A) \leq \varepsilon.$$

   Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie.
   Indication. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le lemme de Borel-Cantelli.
3. Que se passe-t-il si ν est infinie ?

Corrigé.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\nu(A) \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\nu(A) = 0$.
2. On suppose que l'assertion n'est pas vérifiée. Soit $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Notons $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ pour tout $n \geq 1$ et $B = \bigcap_{n\geq 1} B_n$. Alors d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a $\mu(B) = 0$, puis $\nu(B) = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $\nu(B_n) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon$. Et la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion. La mesure ν étant finie, on en déduit que

$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) \geq \varepsilon,$$

   ce qui est contradictoire.
   Attention. On ne peut pas dire que μ a une densité par rapport à ν : ν est finie mais μ n'est pas nécessairement σ-finie, donc on ne peut pas utiliser le théorème de Radon-Nikodym.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

3. Lorsque ν est infinie, cela n'est plus forcément vrai, même si μ et ν sont σ-finies. Par exemple, en prenant μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et ν la mesure absolument continue par rapport à μ de densité $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Alors, pour tout $\eta > 0$, on a $\mu([x, x+\eta]) = \eta$ et

$$\nu([x, x+\eta]) = \int_x^{x+\eta} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+\eta} - \mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty,$$

ce qui montre que la quantification de l'absolue continuité est fausse dans ce cas.

2 – Convolution

Exercice 3. (*Convolution et régularité*) Soit $d \geq 1$ et $f, g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, si la fonction $y \mapsto |f(x-y)g(y)|$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, alors on note

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

qui est appelée la *convolution* de f et de g en x.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et $\varphi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue bornée. Montrer que $f * \varphi$ est définie partout et est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$.
2. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, c'est-à-dire une fonction mesurable de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ intégrable sur tout compact. Soit $\varphi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Montrer que $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^d$,
$$\partial_p(f * \varphi) = f * \partial_p \varphi,$$
où, pour $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $|p| = p_1 + \cdots + p_d$ et
$$\partial_p := \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}}.$$

Corrigé.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a
$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-y)\varphi(y)\right| \mathrm{d}y \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\,\mathrm{d}z < \infty,$$
avec le changement de variable $y \to x - z$. Donc la fonction $y \mapsto |f(x-y)\varphi(y)|$ est intégrable et $f * \varphi$ est bien définie en x. En outre, on a
$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(x-z)\,\mathrm{d}z$$
et on a
   - ▹ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $z \mapsto f(z)\varphi(x-z)$ est mesurable,
   - ▹ pour λ-presque tout $z \in \mathbb{R}^d$, on a $f(z) < \infty$ car f intégrable, donc $x \mapsto f(z)\varphi(x-z)$ est continue.
   - ▹ pour tous $x, z \in \mathbb{R}^d$, $|f(z)\varphi(x-z)| \leq \|\varphi\|_\infty |f(z)|$ et $|f|$ est intégrable.

   Donc, par théorème de continuité sous l'intégrale, on a $f * \varphi$ continue.
2. On pose $K := \operatorname{supp}\varphi$ qui est compact. On remarque que φ est bornée ainsi que toutes ses dérivées car elles sont toutes continue sur K donc bornées dessus et nulles en dehors. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a
$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-y)\varphi(y)\right| \mathrm{d}y \leq \|\varphi\|_\infty \int_K \left|f(x-y)\right| \mathrm{d}y = \|\varphi\|_\infty \int_{x-K} |f(z)|\,\mathrm{d}z < \infty,$$
car $x - K$ est compact donc f est intégrable sur $x - K$. Donc $f * \varphi$ est bien définie en x.
Soit $i \in [\![1, d]\!]$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On note e_i le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On a toujours $f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(x-z)\,\mathrm{d}z$ et, à présent :

▷ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $z \mapsto f(z)\varphi(x-z)$ est intégrable,

▷ pour λ-presque tout $z \in \mathbb{R}^d$, on a $f(z) < \infty$ et alors $t \mapsto f(z)\varphi(x_0 + te_i - z)$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée

$$f(z)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0 + te_i - z).$$

▷ pour tous $z \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [-1,1]$, on a

$$\left| f(z)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0 + te_i - z)\right| \leq \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty |t| \, \mathbb{1}_{x_0 - z \in K'} |f(z)|,$$

où $K' := K + \{se_i : s \in [-1,1]\}$, et $|f| \mathbb{1}_{x_0 - K'}$ est intégrable car $x_0 - K'$ est compact.

Donc, par théorème de dérivation sous l'intégrale, $t \mapsto f * \varphi(x_0 + te_i)$ est dérivable en 0, de dérivée

$$\frac{\partial (f*\varphi)}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f*\varphi(x_0+te_i))\bigg|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0 - z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_0 - y)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y)\,\mathrm{d}y = \left(f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)(x_0).$$

On a donc $\frac{\partial(f*\varphi)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ sur $\mathbb{R}^d$, et $f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ est continue par un raisonnement similaire à la question 1 (mais en travaillant sur un compact). Ainsi $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$.

On procède ensuite par récurrence. Supposons que $f * \varphi$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d$ et que pour $p \in \mathbb{N}^d$ tel que $|p| = k$, on ait $\partial_p(f*\varphi) = f * \partial_p \varphi$. Alors, pour chaque $p \in \mathbb{N}^d$ tel que $|p| = k$, on a $\partial_p \varphi$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, donc, par ce qui précède, $f * \partial_p \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$, donc $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. En outre, pour $i \in [\![1,d]\!]$,

$$\frac{\partial(f * \partial_p \varphi)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial(\partial_p \varphi)}{\partial x_i}.$$

ce qui donne $\partial_{p'}(f*\varphi) = f * \partial_{p'}\varphi$ pour $p' = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i + 1, p_{i+1}, \ldots, p_n)$. Ceci conclut la démonstration.

Exercice 4. (*Convolution de fonctions L^1*)

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)^2 & \longrightarrow & L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda) \\ (f,g) & \longmapsto & f * g \end{array}$$

est bien définie et montrer que, pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g \,\mathrm{d}\lambda.$$

2. Montrer que le produit de convolution munit $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre associative et commutative.

3. Montrer que $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ n'est pas une algèbre unitaire.
Indication. On pourra considérer la fonction indicatrice d'un pavé.

Corrigé.

1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. On pose $F(x,y) := f(x-y)g(y)$ qui est mesurable. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^d)^2} |F| \,\mathrm{d}(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-y)g(y)\right| \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-y)\right| \mathrm{d}x\right)\left|g(y)\right| \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \,\mathrm{d}x\right)\left|g(y)\right| \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty,\end{aligned}$$

donc F est intégrable pour $\lambda \otimes \lambda$. Par le théorème de Fubini-Lebesgue, on obtient que, pour λ-p.t. $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable et la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ est λ-intégrable, c'est-à-dire $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Et en outre, toujours par Fubini-Lebesgue, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\lambda,$$

en procédant de la même manière dans le calcul.

Remarque. On a ainsi $\|f * g\|_1 \leq \big\| |f| * |g| \big\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

2. On a montré que le produit de convolution est bien défini de $L^1 \times L^1$ dans L^1. La bilinéarité est immédiate et munit $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre.
Montrons la commutativité. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, on a pour presque tout x (pour les x tels que $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable)

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y = g * f(x),$$

grâce au changement de variable $y \to x - y$. Donc $f * g = g * f$ presque partout.
Montrons l'associativité. Soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, les fonctions $y \mapsto (|f| * |g|)(x-y)h(y)$ et $y \mapsto (f * h)(x-y)g(y)$ sont intégrables par la question 1. On considère un tel x, alors $y \mapsto (f * g)(x-y)h(y)$ est aussi intégrable et $(f * g) * h(x)$ et $(f * h) * g(x)$ sont bien définis. Alors, on a

$$\begin{aligned}(f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y-z)g(z)\,\mathrm{d}z \right) h(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y-z)h(y)\,\mathrm{d}y \right) g(z)\,\mathrm{d}z = (f * h) * g(x),\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini-Lebesgue à la fonction $(y, z) \mapsto f(x-y-z)g(z)h(y)$, qui est intégrable car

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| f(x-y-z)g(z)h(y) \right| \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} (|f| * |g|)(x-y) \left| h(y) \right| \mathrm{d}y < \infty,$$

car $y \mapsto (|f| * |g|)(x-y)h(y)$ est intégrable, par choix de x. On a donc $(f * g) * h = (f * h) * g$ presque partout. En combinant cette formule avec la commutativité on obtient

$$(f * g) * h = (f * h) * g = (h * f) * g = (h * g) * f = f * (g * h)$$

presque partout, ce qui montre l'associativité.

3. Supposons qu'un élément neutre $u \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ pour le produit de convolution existe. On pose $P := [0,1]^d$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{1}_P * u(x)$ est bien définie et $\mathbb{1}_P * u(x) = \mathbb{1}_P(x)$. En outre, pour un tel x, on a

$$\mathbb{1}_P * u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_P(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{P_x} u(y)\,\mathrm{d}y,$$

où $P_x := \prod_{i=1}^d [x_i - 1, x_i]$ pour $x \in \mathbb{R}^d$. On a donc $\mathbb{1}_P = f$ presque partout, où l'on pose

$$f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{P_x} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Comme u est intégrable, la fonction f est continue (elle est même uniformément continue par uniforme continuité de l'intégrale : voir l'exercice 1 du TD 2).
Comme $\mathbb{1}_P = f$ presque partout, on a $\lambda(f^{-1}(]0,1[)) = \lambda((\mathbb{1}_P)^{-1}(]0,1[)) = \lambda(\varnothing) = 0$ et, en outre, f prend les valeurs 0 et 1. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, $f^{-1}(]0,1[)$ est non vide. Or c'est un ouvert par continuité de f, donc $\lambda(f^{-1}(]0,1[)) > 0$. C'est absurde.

3 – Opérateur de translation

Exercice 5. (*Continuité de l'opérateur de translation*) Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x-h)$.

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
2. On suppose $p < \infty$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.
   (a) Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \to 2^{1/p} \|f\|_p$ quand $|h| \to \infty$.
   Indication. On pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.
3. Que deviennent les résultats de la question 2. si $p = \infty$?
4. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lambda(A) > 0$. Montrer que $A - A := \{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage de 0.

Corrigé.

1. Pour $p = \infty$ c'est clair, et, pour $p < \infty$, il suffit de faire un changement de variable $x \mapsto x - h$.
2. Soit f une fonction continue à support compact K. Montrons (a) et (b) pour f.
   (a) La fonction f est donc uniformément continue. On a, pour tout $\|h\| < 1$,
   $$\|\tau_h f - f\|_p^p \le \lambda(K + B(0,1)) \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p,$$
   et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \to 0$ quand $h \to 0$ (une autre possibilité est d'utiliser le théorème de convergence dominée).
   (b) Soit h tel que $\|h\| > \operatorname{diam}(K)$. Alors les supports de $\tau_h f$ et f sont disjoints. On a donc
   $$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_p^p &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \mathbb{1}_{\{x \in \operatorname{supp}(f)\}} \,\mathrm{d}x + \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \mathbb{1}_{\{x \in \operatorname{supp}(\tau_h f)\}} \,\mathrm{d}x \\ &= \|f\|_p^p + \|\tau_h f\|_p^p = 2\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

   Soit maintenant $f \in L^p$ et $\varepsilon > 0$. On peut trouver une fonction g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \le \varepsilon$. Ainsi, pour tout $h \ge 0$,
   $$\|\tau_h g - g\|_p - \|\tau_h g - \tau_h f\|_p - \|g - f\|_p \le \|\tau_h f - f\|_p \le \|\tau_h g - g\|_p + \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|g - f\|_p,$$
   c'est à dire
   $$-2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p \le \|\tau_h f - f\|_p \le 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$
   Ainsi, on a
   $$\limsup_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p \le 2\varepsilon,$$
   et
   $$2^{1/p}\|f\|_p - (2 + 2^{1/p})\varepsilon \le \liminf_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \le \limsup_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \le (2 + 2^{1/p})\varepsilon + 2^{1/p}\|f\|_p.$$
   Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que f vérifie (a) et (b).
3. Dans le cas où $p = +\infty$, les résultats ne sont plus vrais. En effet, en posant $f = \mathbb{1}_{[0,1]^d}$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ donc $\|\tau_h f - f\|_\infty \not\to 0$ quand $h \to 0$. De même en posant $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ on a $\|\tau_h g - g\|_\infty = 0$ et donc $\|\tau_h g - g\|_\infty \not\to 2^{1/p}$ quand $|h| \to \infty$.

4. Notons $A_n = A \cap B(0,n)$. Alors $\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$. Il existe donc $n \geq 0$ tel que $\lambda(A_n) > 0$. On peut donc supposer que A est borné, de mesure strictement positive. Alors $f = \mathbb{1}_A$ est dans L^1. On a
$$\tau_h f - f = \mathbb{1}_{A\Delta(A+h)},$$
où Δ désigne la différence symétrique ($A\Delta B := (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$). Donc
$$\left\|\mathbb{1}_{A\Delta(A+h)}\right\|_1 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \text{ ie } \lambda(A\Delta(A+h)) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$
En particulier, $\lambda(A\cap(A+h)^c) \to 0$ donc $\lambda(A\cap(A+h)) \to \lambda(A)$. Donc il existe $r>0$ tel que $\lambda(A\cap(A+h))>0$ pour tout $h \in B(0,r)$. En particulier, $A\cap(A+h) \neq \varnothing$. Donc il existe $x, y \in A$ tels que $x = y+h$ et donc $h = x-y$. On a donc montré que $B(0,r) \subset A - A$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. (*Transformation de Fourier*) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa *transformée de Fourier* $\hat{f}$ par
$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. (*Transformée de Fourier d'une gaussienne*) On considère la fonction
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$
   (a) Montrer que $\xi\hat{f}(\xi) + \hat{f}'(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculer $\hat{f}$.

Corrigé.

1. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres, dont les hypothèses sont vérifiées :
   - ▷ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est mesurable ;
   - ▷ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (i.e. pour x tel que $|f(x)| < \infty$), $\xi \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est continue ;
   - ▷ pour tous $\xi, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}| \leq |f(x)|$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Donc $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. En outre, il est clair que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 < \infty$ donc $\hat{f}$ est bornée.
2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, dont les hypothèses sont vérifiées :
   - ▷ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
   - ▷ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (i.e. pour x tel que $|f(x)| < \infty$), $\xi \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\xi \mapsto -ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$;
   - ▷ pour tous $\xi, x \in \mathbb{R}$,
   $$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\left(f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\right)\right| \leq |xf(x)|$$
   et la fonction $x \mapsto |xf(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Donc $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $\xi \in \mathbb{R}$,
   $$\hat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = -i\cdot\widehat{xf(x)}(\xi).$$

3. (a) Il est clair que $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\hat{f}$ est dérivable et, pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}(\xi\hat{f}(\xi)+\hat{f}'(\xi)) &= \int_{\mathbb{R}}(\xi - ix)\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = -i\mathrm{e}^{\xi^2/2}\int_{\mathbb{R}}(x+i\xi)\mathrm{e}^{-(x+i\xi)^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= i\mathrm{e}^{\xi^2/2}\left[\mathrm{e}^{-(x+i\xi)^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0.\end{aligned}$$

(b) On veut résoudre l'équation différentielle linéaire du 1er ordre $y' + xy = 0$. Une solution évidente est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$, donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\hat{f}(\xi) = c\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$. En outre, on a

$$c = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = 1,$$

donc on en conclut que $\hat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

Exercice 7. (*Le retour du diable*) Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ l'escalier du diable défini dans l'exercice 7 du TD 3. On note $\mathrm{d}f$ la mesure de Stieljes associée à f, qui est une mesure sur $[0,1]$ (voir l'exercice 2 du DM 2, on prolonge f par 0 sur $]-\infty,0[$ et par 1 sur $]1,\infty[$ pour se ramener à une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses souhaitées).

1. Montrer que $\mathrm{d}f$ est étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. La mesure $\mathrm{d}f$ a-t-elle des atomes ?

Corrigé.

1. Le support de la mesure $\mathrm{d}f$ est l'ensemble de Cantor triadique K_3, qui est de mesure de Lebesgue nulle. Ainsi $\mathrm{d}f$ et la mesure de Lebesgue sont étrangères.
2. La mesure $\mathrm{d}f$ n'a pas d'atomes, car la fonction croissante f est continue.

Exercice 8. (*Fonctions à variation finie*) Soit une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
   (b) Il existe une mesure signée μ sur $[a,b]$ telle que $f(x) = \mu([a,x])$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (c) f est continue à droite et *à variation finie*, c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante

$$\sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$

   Indication. On pourra utiliser l'existence de la mesure de Stieljes (voir l'exercice 2 du DM 2).
2. Donner un exemple de fonction continue de $[0,1] \to \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation finie.

Corrigé.

1. (a) $\Rightarrow$ (b) : On suppose que $f = g - h + f(a)$ avec g et h croissantes, continues à droite et $g(a) = h(a) = 0$. Soit ν_g (resp. ν_h) la mesure de Stieljes associée à g (resp. h). Posons

$$\mu = \nu_g - \nu_h + f(a)\delta_a.$$

   Alors μ est une mesure signée sur $[a,b]$ telle que $f(x) = \mu([a,x])$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (b) $\Rightarrow$ (c) : Il est évident que f est continue à droite. Soient $n \geq 2$ et $a_1,\ldots,a_n$ vérifiant $a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq b$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n-1}|f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n-1}|\mu(]a_{i-1},a_i])| \leq \sum_{i=1}^{n-1}|\mu|(]a_{i-1},a_i]) \leq |\mu|([a,b]).$$

Donc f est à variation bornée.
(c) $\Rightarrow$ (a) : Pour tout $x \in [a,b]$, posons

$$V(x) := \sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq x} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

Alors V est croissante. On peut donc définir pour tout $x \in [a,b]$,

$$g(x) := \lim_{y\downarrow x} V(y).$$

Ainsi, g est croissante et continue à droite. Posons $h = g - f$. Alors h est continue à droite. Montrons que h est croissante. Soient $a \leq x < y \leq b$ et $\varepsilon > 0$. Pour tous $n \geq 2$ et $a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq x$, on a

$$\begin{aligned} V(y+\varepsilon) - f(y+\varepsilon) &\geq |f(y+\varepsilon) - f(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(y+\varepsilon) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(x) \\ &\geq V(x) - f(x). \end{aligned}$$

Donc, $h(y+\varepsilon) \geq h(x)$ puis en faisant tendre ε vers 0 on obtient $h(y) \geq h(x)$.

2. La fonction $f\colon x \in]0,1] \mapsto x\cos(1/x)$, prolongée par continuité en 0 n'est pas à variation bornée : considérer la subdivision
$$0 < \frac{1}{n\pi} < \cdots < \frac{1}{3\pi} < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1,$$
qui donne une variation qui tend vers l'infini quand $n \to \infty$.

Exercice 9. Soit $f\colon (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ en posant, pour $x \geq 0$,
$$F(x) := \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Corrigé.

1. On pose $g(x,t) = \arctan(xf(t))/(1+t^2)$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Alors pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue. De plus pour tout $x \geq 0$ la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable et $|g(x,t)| \leq \pi/(2(1+t^2))$. Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction F est continue sur $[0,+\infty[$.
2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers $+\infty$. Alors $g(x_n,t) \to \pi/(2(1+t^2))\mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}$ pour tout $t \geq 0$. La domination utilisée à la question précédente permet d'utiliser le théorème de convergence dominée et d'obtenir que
$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)} \mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)} \mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\,\mathrm{d}t.$$

3. Pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est dérivable de dérivée
$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}.$$
Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ on a
$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leq \frac{1}{a(1+t^2)}.$$
Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et ceci pour tout $a > 0$, elle est donc dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. On va montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ est intégrable. Supposons que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ soit intégrable. Alors pour tout $x \geq 0$ on a
$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leq \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$
Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[0,+\infty[$. Supposons maintenant que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ ne soit pas intégrable. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0. Alors pour tout $t \geq 0$,
$$\frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$
Donc d'après le lemme de Fatou,
$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \infty.$$
Ainsi $F(x_n)/x_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Exercice 10. (*L'espace des mesures complexes*) Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable. On note $\mathcal{M}$ l'espace des mesures complexes sur $(E,\mathcal{A})$. Pour $\mu \in \mathcal{M}$, on pose
$$\|\mu\| := |\mu|(E),$$
où $|\mu|$ est la variation totale de μ. Montrer que $(\mathcal{M}, \|{-}\|)$ est un espace de Banach.

Corrigé. On vérifie assez aisément que $\mathcal{M}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $\|{-}\|$ est bien une norme. Montrons la complétude : soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|{-}\|$.
Étape 1. Pour tout borélien $A \in \mathcal{A}$ et $n,p \in \mathbb{N}$, on a $|\mu_n(A) - \mu_p(A)| \leq \|\mu_n - \mu_p\|$, ce qui implique que la suite $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, et converge donc vers une limite notée $\mu(A)$.
Étape 2. Montrons que μ est une mesure complexe sur $(E,\mathcal{A})$. Prouvons tout d'abord que :
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)| : A \in \mathcal{A}\} = 0. \tag{1}$$
À cet effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \varepsilon$ pour tous $n,k \geq n_0$. Soit $A \in \mathcal{A}$. On choisit $k > n_0$ tel que $|\mu(A) - \mu_k(A)| < \varepsilon$. Alors pour $n > n_0$:
$$|\mu(A) - \mu_n(A)| \leq |\mu(A) - \mu_k(A)| + |\mu_k(A) - \mu_n(A)| \leq \varepsilon + \|\mu_k - \mu_n\| \leq 2\varepsilon,$$
ce qui prouve (1).
Ensuite, les mesures μ_n sont en particulier finiment additives, ce qui implique aisément que μ est finiment additive. Montrons maintenant que μ est σ-additive. Soit $(A_i)_{i\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables disjoints et $\varepsilon > 0$. D'après (1), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$\sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)| : A \in \mathcal{A}\} \leq \varepsilon.$$

On choisit ensuite $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left|\mu_n\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right)\right| \leq \varepsilon.$$

En particulier, ceci implique que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left|\mu\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right)\right| \leq 2\varepsilon.$$

Par additivité (finie) de μ, on obtient finalement, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left|\mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) - \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\right| = \left|\mu\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right)\right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la σ-additivité de μ en découle, ce qui prouve que μ est une mesure.
Étape 3. On vérifie que $\|\mu_n - \mu\| \to 0$. On rappelle que

$$\|\mu_n - \mu\| = \sup\left\{\sum_{i\geq 1}\left|(\mu_n - \mu)(E_i)\right| : (E_i)_{i\geq 1} \text{ partition de } E\right\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq n$, $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \varepsilon$. Soit $(E_i)_{i\geq 1}$ une partition de E, la série

$$\sum_{i\geq 1}\left|(\mu_n - \mu)(E_i)\right|$$

est finie (car $\mu_n - \mu$ est bien une mesure complexe) donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i\geq N+1}\left|(\mu_n - \mu)(E_i)\right| \leq \varepsilon$$

Alors, on a, pour tout $k \geq n$,

$$\begin{aligned}\sum_{i\geq 1}\left|(\mu_n - \mu)(E_i)\right| &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{N}\left|(\mu_n - \mu)(E_i)\right| \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{N}\left|(\mu_n - \mu_k)(E_i)\right| + \sum_{i=1}^{N}\left|(\mu_k - \mu)(E_i)\right| \\ &\leq \varepsilon + \|\mu_n - \mu_k\| + N\sup\{|\mu(A) - \mu_k(A)| : A \in \mathcal{A}\}\end{aligned}$$

Comme $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \varepsilon$, on obtient, en faisant tendre k vers l'infini et en utilisant (1),

$$\sum_{i\geq 1}\left|(\mu_n - \mu)(E_i)\right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour toute partition $(E_i)_{i\geq 1}$, on en déduit que $\|\mu_n - \mu\| \leq 2\varepsilon$ et donc que, pour tout $k \geq n$, $\|\mu_k - \mu\| \leq 3\varepsilon$. On a donc montré que $\|\mu_n - \mu\| \to 0$.

Fin