TD 6 – Absolue continuité et intégrales à paramètres

1 – Théorème de Radon-Nikodym et absolue continuité

Exercice 1. (*Contre-exemple*) Soit μ la mesure de comptage sur $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot \mu$. Conclure.

Exercice 2. (*Quantification de l'absolue continuité*) Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Considérons μ et ν des mesures sur $(E,\mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,
$$\mu(A) \leq \eta \Rightarrow \nu(A) \leq \varepsilon.$$
Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie.
Indication. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le lemme de Borel-Cantelli.
3. Que se passe-t-il si ν est infinie ?

2 – Convolution

Exercice 3. (*Convolution et régularité*) Soit $d \geq 1$ et $f,g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, si la fonction $y \mapsto |f(x-y)g(y)|$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$, alors on note
$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$
qui est appelée la *convolution* de f et de g en x.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$ et $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue bornée. Montrer que $f * \varphi$ est définie partout et est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$.
2. Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$, c'est-à-dire une fonction mesurable de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ intégrable sur tout compact. Soit $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Montrer que $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^d$,
$$\partial_p(f * \varphi) = f * \partial_p\varphi,$$
où, pour $p = (p_1,\dots,p_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $|p| = p_1 + \cdots + p_d$ et
$$\partial_p := \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_d^{p_d}}.$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 4. (*Convolution de fonctions L^1*)

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)^2 & \longrightarrow & L^1(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda) \\ (f,g) & \longmapsto & f*g \end{array}$$

   est bien définie et montrer que, pour $f,g\in L^1(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f*g\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\lambda.$$

2. Montrer que le produit de convolution munit $L^1(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre associative et commutative.
3. Montrer que $L^1(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$ n'est pas une algèbre unitaire.
   Indication. On pourra considérer la fonction indicatrice d'un pavé.

3 – Opérateur de translation

Exercice 5. (*Continuité de l'opérateur de translation*) Soit $h\in\mathbb{R}^d$ et $f\colon(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))\to(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f\colon x\in\mathbb{R}^d\mapsto f(x-h)$.

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $L^p(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$ pour tout $p\in[1,+\infty]$.
2. On suppose $p<\infty$. Soit $f\in L^p(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$.
   (a) Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$ quand $h\to 0$.
   (b) Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \to 2^{1/p}\|f\|_p$ quand $|h|\to\infty$.
   Indication. On pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.
3. Que deviennent les résultats de la question 2. si $p=\infty$?
4. Soit $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lambda(A)>0$. Montrer que $A-A := \{x-y : x,y\in A\}$ contient un voisinage de 0.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. (*Transformation de Fourier*) Si $f\in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa *transformée de Fourier* $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \xi\in\mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x\mapsto xf(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. (*Transformée de Fourier d'une gaussienne*) On considère la fonction

$$f\colon x\in\mathbb{R}\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

   (a) Montrer que $\xi\hat{f}(\xi)+\hat{f}'(\xi)=0$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $\hat{f}$.

Exercice 7. (*Le retour du diable*) Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ l'escalier du diable défini dans l'exercice 7 du TD 3. On note $\mathrm{d}f$ la mesure de Stieljes associée à f, qui est une mesure sur $[0,1]$ (voir l'exercice 2 du DM 2, on prolonge f par 0 sur $]-\infty, 0[$ et par 1 sur $]1, \infty[$ pour se ramener à une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses souhaitées).

1. Montrer que $\mathrm{d}f$ est étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. La mesure $\mathrm{d}f$ a-t-elle des atomes ?

Exercice 8. (*Fonctions à variation finie*) Soit une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
   (b) Il existe une mesure signée μ sur $[a,b]$ telle que $f(x) = \mu([a,x])$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (c) f est continue à droite et *à variation finie*, c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante
   $$\sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$
   Indication. On pourra utiliser l'existence de la mesure de Stieljes (voir l'exercice 2 du DM 2).
2. Donner un exemple de fonction continue de $[0,1] \to \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation finie.

Exercice 9. Soit $f\colon (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ en posant, pour $x \geq 0$,
   $$F(x) := \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Exercice 10. (*L'espace des mesures complexes*) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On note $\mathcal{M}$ l'espace des mesures complexes sur $(E, \mathcal{A})$. Pour $\mu \in \mathcal{M}$, on pose

$$\|\mu\| := |\mu|(E),$$

où $|\mu|$ est la variation totale de μ. Montrer que $(\mathcal{M}, \|{-}\|)$ est un espace de Banach.

Fin