

Géométrie Différentielle, TD 6 du 07 avril 2014

1. Orientabilité

- 1- Soient M et N deux variétés de classe C^∞ orientables. Montrer que $M \times N$ est orientable.
- 2- Soit M une variété de classe C^∞ quelconque. Montrer que la variété TM est orientable.

Solution :

- 1- Fixons une orientation de M et N . Si U_M et U_N sont des ouverts de M et N et si $\varphi_M : U_M \rightarrow V_M \subset \mathbb{R}^m$ et $\varphi_N : U_N \rightarrow V_N \subset \mathbb{R}^n$ sont des cartes orientées, $(\varphi_M, \varphi_N) : U_M \times U_N \rightarrow V_M \times V_N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ est une carte de $M \times N$. Montrons que ces cartes munissent $M \times N$ d'une structure de variété orientée.

Si (ψ_M, ψ_N) est une autre telle carte, l'application de changement de cartes est $(\psi_M, \psi_N) \circ (\varphi_M, \varphi_N)^{-1}$. Sa différentielle en $x \in V_M \times V_N$ est :

$$\begin{pmatrix} d_x(\psi_M \circ \varphi_M^{-1}) & 0 \\ 0 & d_x(\psi_N \circ \varphi_N^{-1}) \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant positif car chacun des deux blocs est de déterminant positif.

- 2- Soit U un ouvert de M et $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ une carte de M . Soit $T\varphi : TU \rightarrow V \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}$ la carte de TM associée. Montrons que ces cartes munissent TM d'une structure de variété orientée.

Si ψ est une autre carte de M , l'application de changements de cartes est $T\psi \circ T\varphi^{-1}(x, v) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), d_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v))$. Sa différentielle en (x, v) est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} d_x(\psi \circ \varphi^{-1}) & \bullet \\ 0 & d_x(\psi \circ \varphi^{-1}) \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant positif.

2. Forme volume canonique d'une sous-variété orientée de l'espace euclidien

- 1- Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et e_1, \dots, e_d est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de \mathbb{R}^n) directe (au sens de l'orientation de M) de $T_x M$,

$$\omega_x(e_1, \dots, e_d) = 1.$$

2– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à \mathbb{S}^{n-1} de

$$\sigma = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_i} \dots \wedge dx_n.$$

3– Exprimer l'intégrale sur la sphère de cette forme volume, en fonction du volume de la boule unité de \mathbb{R}^n .

Solution :

1– L'unicité est évidente car la condition détermine ω_x pour tout $x \in M$.

Pour montrer l'existence, il faut vérifier le caractère C^∞ de ω . Faisons-le au voisinage de $x \in M$. Pour cela on choisit un ouvert U de \mathbb{R}^d et $F : U \rightarrow M$ un paramétrage local orienté de M au voisinage de x . On note $u = F^{-1}(x)$. Soit (a_1, \dots, a_d) la base canonique de \mathbb{R}^d et (e_1, \dots, e_d) une base orthonormale directe de $T_x M$. Alors :

$$\begin{aligned} \omega_{F(u)}(T_u F(a_1), \dots, T_u F(a_d)) &= \det(\langle T_u F(a_i), e_j \rangle_{1 \leq i, j \leq d}) \\ &= (\det(\langle T_u F(a_i), T_u F(a_j) \rangle_{1 \leq i, j \leq d}))^{1/2} \end{aligned}$$

où l'on a pris la racine positive, car le paramétrage local respecte les orientations.

On a montré la formule ci-dessous qui prouve, comme voulu, le caractère C^∞ de ω :

$$F^* \omega = (\det(\langle T_u F(a_i), T_u F(a_j) \rangle_{1 \leq i, j \leq d}))^{1/2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

Autre preuve : on montre qu'on peut trouver des sections lisses s_1, \dots, s_d de $T_x M$ formant en tout point une base orthonormée directe : vu la définition de ω , ceci prouvera le caractère lisse. On se ramène à la situation locale suivante : soit U ouvert de \mathbb{R}^d et g une application lisse de U dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille d . Alors il existe d application a_1, \dots, a_d de U dans \mathbb{R}^d telles que $(a_1(u), \dots, a_d(u))$ est orthonormée pour $g(u)$ pour tout u . Pour montrer cela, on part d'une base quelconque fixe de \mathbb{R}^d et on applique en tout point le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ; ceci donne une base, dépendant de façon lisse de u , car g est une fonction lisse de u .

2– On vérifie aisément que la forme ω définie sur \mathbb{S}^{n-1} par la formule $\omega_x(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det(x, v_1, \dots, v_{n-1})$ vérifie les propriétés requises, et est donc (par unicité) la forme volume canonique sur \mathbb{S}^{n-1} . Que cette forme coïncide avec celle donnée dans l'énoncé résulte juste du développement du déterminant suivant la première colonne.

3– On calcule $d\sigma = n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. On peut alors appliquer la formule de Stokes : en notant \mathbb{B}^n la boule unité,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma|_{\mathbb{S}^{n-1}} = n \int_{\mathbb{B}^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

On reconnaît le volume d'une boule connu classiquement (procéder par récurrence sur n , appliquer Fubini, faire un changement de variables trigonométrique et reconnaître

une intégrale de Wallis). Tous calculs faits,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

3. Bouteille de Klein

On identifie \mathbb{S}^1 à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on considère $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. On introduit $\sigma : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 : (\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$.

- 1– Montrer que $K = \mathbb{T}^2 / \langle \text{Id}, \sigma \rangle$ a une structure naturelle de variété de classe C^∞ .
- 2– Montrer que K n'est pas orientable.
- 3– En admettant que \mathbb{T}^2 et \mathbb{S}^2 ne sont pas difféomorphes, montrer que K n'est pas difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On pourra identifier \mathbb{S}^2 (resp. \mathbb{T}^2) au fibré des orientations de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (resp. K), en un sens à définir.

Solution :

- 1– L'automorphisme σ est sans point fixe car il change toujours la seconde coordonnée. Le groupe $\langle \text{Id}, \sigma \rangle$ agit donc librement. Il agit de plus proprement car c'est un groupe fini. Le quotient admet donc une structure de variété de classe C^∞ .
- 2– Notons π l'application quotient. Supposons par l'absurde que K est orientable et fixons une orientation de K . Comme π est un difféomorphisme local, elle induit une orientation de \mathbb{T}^2 . Quitte à changer d'orientation, on peut supposer que c'est l'orientation canonique de \mathbb{T}^2 (i.e. l'orientation produit où les orientations des facteurs sont induites par l'orientation canonique de \mathbb{R}). Alors, comme $\pi \circ \sigma = \pi$, σ préserve l'orientation de \mathbb{T}^2 . Cependant, lu dans des cartes orientées adéquates, $\sigma :]-\pi; \pi[\times]-\pi; \pi[\rightarrow]-\pi; \pi[\times]-\pi; \pi[$ a pour expression $(\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$ qui est de déterminant -1 donc négatif. L'automorphisme σ ne préserve donc pas l'orientation de \mathbb{T}^2 . C'est absurde.
- 3– Si X est une variété, on définit son fibré des orientations \tilde{X} comme l'ensemble des couples (x, o) où x est dans X et o est une orientation de $T_x M$. On munit aisément \tilde{X} d'une structure de variété rendant lisse la projection canonique $\tilde{X} \rightarrow X$. On montre alors que si Y est une variété lisse orientée, munie d'une action libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui ne respecte pas l'orientation, alors Y s'identifie au fibré des orientations de son quotient pour cette action. On conclut en appliquant ce résultat pour $Y = \mathbb{S}^2$ et $Y = \mathbb{T}^2$.

4. Une formule d'intégration

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application lisse, propre et préservant l'orientation entre variétés orientées de même dimension n . On note E l'ensemble des points critiques de f .

- 1– Montrer que les fibres de f au-dessus des valeurs non critiques sont de cardinal fini et que le cardinal de ces fibres est localement constante, comme fonction définie sur $Y \setminus f(E)$.
- 2– Soit ω une forme de degré n à support compact sur Y . On définit $\int_Y \text{Card}(f^{-1}(y))\omega_y$ comme étant l'intégrale de $\text{Card}(f^{-1}(y))\omega_Y$ sur $Y \setminus f(E)$. On suppose de plus E de mesure nulle ; montrer que

$$\int_X f^*(\omega) = \int_Y \text{Card}(f^{-1}(y))\omega_y.$$

- 3– Cas particulier : on suppose que $Y = X/G$, où G est un groupe agissant librement et proprement discontinûment sur X par difféomorphismes. On suppose Y orientée ; montrer qu'il existe une unique orientation sur X telle que la projection $p : X \rightarrow Y$ respecte les orientations.
- 4– Montrer que, pour ces orientations, $\int_X p^*(\omega) = \text{Card}(G) \int_Y \omega$.

Solution :

- 1– On peut supposer que f est un difféomorphisme local propre. Alors, les fibres de f sont discrètes car f est un difféomorphisme local et compactes par propriété de f . Elles sont donc de cardinal fini. Soit y dans Y ayant k antécédents par f . On va montrer que y admet un voisinage V tel que tout point de V admet exactement k antécédents. C'est clair si $k = 0$, car l'image de f est fermée par propriété. On suppose donc $k \geq 1$. Soit x_1, \dots, x_k les antécédents de y . Par inversion locale, soit U_i ouvert de X contenant x_i tel que $f : U_i \rightarrow f(U_i)$ est un difféomorphisme, avec $f(U_i)$ ouvert contenant y . Sans perte de généralité, on peut supposer les U_i disjoints et les $f(U_i)$ égaux à un même V , relativement compact.

Soit K un voisinage compact de V , alors $f^{-1}(K)$ est compact par propriété et $f^{-1}(K) \setminus \bigcup U_i$ également. On pose $W = V \setminus f(f^{-1}(K) \setminus \bigcup U_i)$; c'est un ouvert car $f(f^{-1}(K) \setminus \bigcup U_i)$ est compact. Par construction, les fibres au-dessus des points de W ont toutes cardinal k .

- 2– On définit M_k comme l'ensemble des points de $Y \setminus f(E)$ dont la fibre est de cardinal k , et $M'_k = f^{-1}(M_k)$. Ainsi, $Y \setminus f(E)$ est l'union disjointe des ouverts M_k et pour $k \geq 1$, $f : M'_k \rightarrow M_k$ est un difféomorphisme local à fibres de cardinal k (nécessairement propre). Remarquons que $f^{-1}(f(E))$ est de mesure nulle par les hypothèses. En effet, cet ensemble s'écrit $E \cup f^{-1}(f(E)) \setminus E$. L'ensemble E est de mesure nulle par hypothèse ; le complémentaire est la préimage par une submersion (ici le difféomorphisme local $f|_{X-E}$) de la partie de mesure nulle $f(E)$ dans Y . Ainsi, puisque $f^{-1}(f(E))$ et $f(E)$ sont de mesure nulle, on peut supposer que f est un difféomorphisme local propre, c'est-à-dire que E est vide. Par la question précédente, le cardinal des fibres est constant sur chaque composante connexe de Y et il suffit de prouver la formule pour $f : M'_k \rightarrow M_k$. En utilisant une partition de l'unité (et la linéarité de l'intégrale), on peut de plus supposer que ω est à support dans un ouvert de carte (V, φ) orientée

telle que $f^{-1}(V)$ est l'union disjointe de k ouverts U_i . Puisque f respecte l'orientation, les $(U_i, \varphi \circ f)$ sont aussi des cartes orientées et le résultat est alors immédiat.

- 3– On va prendre pour cartes orientées de X les cartes construites comme suit. Soit $x \in X$, et U, V des voisinages de x et $p(x)$ tels que p réalise un difféomorphisme $U \rightarrow V$. Quitte à réduire U et V , on peut supposer qu'il existe une carte orientée $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de X/G . Alors $\varphi \circ p : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte orientée de X .

Il faut vérifier que les changements de carte ont un jacobien positif. Mais le jacobien en un point x du changement de cartes entre les cartes $\varphi \circ p$ et $\psi \circ p$ coïncide avec le jacobien en $p(x)$ du changement de carte entre les cartes φ et ψ , qui est positif car les cartes φ et ψ sont des cartes orientées de X/G .

- 4– La formule est claire : la projection p est un difféomorphisme local à fibres de cardinal $\text{Card}(G)$ et on peut appliquer la question 2.

5. Sommes de normales

On considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Soit M une partie de \mathbb{S}^2 délimitée par une sous-variété de dimension 1 fermée ∂M de \mathbb{S}^2 , de sorte que M est une variété à bord de bord ∂M .

On munit M et ∂M des formes volumes canoniques, qu'on note da et ds . Si $x \in \mathbb{S}^2$, on note $N(x)$ le vecteur normal unitaire sortant. Si $x \in \partial M$, on note $n(x)$ le vecteur tangent à la sphère en x qui est le vecteur normal unitaire sortant à ∂M .

Montrer que :

$$\int_{\partial M} n(x) ds + 2 \iint_M N(x) da = 0.$$

Solution :

On va considérer des formes différentielles à valeurs dans \mathbb{R}^3 . Les formules usuelles restent valables en raisonnant coordonnées par coordonnées dans \mathbb{R}^3 .

Introduisons la 1-forme différentielle ω sur \mathbb{R}^3 donnée par $\omega_x(v) = -x \times v$, où \times désigne le produit vectoriel. En particulier, on vérifie que $\omega|_{\partial M} = n(x) ds$.

Introduisons la 2-forme différentielle α sur \mathbb{R}^3 donnée par $\alpha_x(v_1, v_2) = v_1 \times v_2$. En particulier, on vérifie que $\alpha|_M = N(x) da$.

On calcule de plus que $d\omega = -2\alpha$. Par exemple, la première coordonnée de ω est donnée par $x_3 dx_2 - x_2 dx_3$, de sorte que la première coordonnée de $d\omega$ est donnée par $-2 dx_2 \wedge dx_3$. Mais la première coordonnée de α est bien $dx_2 \wedge dx_3$.

On applique alors le théorème de Stokes : $\int_{\partial M} n(x) ds = \int_{\partial M} \omega = \iint_M d\omega = -2 \iint_M \alpha = -2 \iint_M N(x) da$

6. Formule de Cauchy-Crofton

- 1– On identifie l'ensemble des droites orientées du plan euclidien à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ en associant à (θ, p) la droite d'équation $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ de vecteur directeur $(\sin \theta, -\cos \theta)$. Montrer que la forme différentielle $dp \wedge d\theta$ est invariante sous l'action naturelle des isométries affines directes du plan.
- 2– Soit C une courbe fermée C^∞ du plan, de longueur L paramétrée par son abscisse curviligne s . Soit $F : [0; L] \times [0; \pi] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ l'application qui à (s, φ) associe la droite passant par le point de C d'abscisse curviligne s et faisant un angle φ avec la tangente orientée à C en ce point. Montrer que :

$$F^*(dp \wedge d\theta) = \sin \varphi ds \wedge d\varphi.$$

- 3– En déduire que pour presque toute droite D , l'ensemble $D \cap C$ est fini, et que

$$\int_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}} \text{Card}(D \cap C) dp \wedge d\theta = 2L.$$

Solution :

- 1– Il suffit de vérifier l'invariance par l'action de générateurs de ce groupe : par exemple, les rotations d'angle α autour de l'origine et les translations de vecteur (a, b) .
On calcule que la rotation d'angle α envoie la droite (p, θ) sur la droite $(p, \theta + \alpha)$ et que la translation de vecteur (a, b) envoie la droite (p, θ) sur la droite $(p + a \cos \theta + b \sin \theta, \theta)$. Ces deux transformations préservent bien $dp \wedge d\theta$.
- 2– Soit α l'angle que fait la tangente à C avec l'axe des abscisses. Comme C est paramétrée par son abscisse curviligne, le vecteur tangent $(x'(s), y'(s))$ est de norme 1 et $(x'(s), y'(s)) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. On calcule

$$F(s, \varphi) = (\varphi + \alpha - \pi/2, x(s) \sin(\alpha + \varphi) - y(s) \cos(\alpha + \varphi)),$$

ce qui montre que F est C^∞ .

Calculons alors :

$$\begin{aligned} F^* dp &= f F^* d\theta + (x'(s) \cos \theta + y'(s) \sin \theta) ds \\ &= f F^* d\theta + (\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) ds \\ &= f F^* d\theta + \cos(\theta - \alpha) ds \\ &= f F^* d\theta + \sin \varphi ds, \end{aligned}$$

où f est une fonction que nous n'avons pas besoin d'explicitier. De même,

$$F^* d\theta = d\varphi + g ds,$$

où g est une fonction. Finalement,

$$\begin{aligned} F^*(dp \wedge d\theta) &= \sin \varphi ds \wedge F^* d\theta \\ &= \sin \varphi ds \wedge d\varphi \end{aligned}$$

- 3– On applique la formule d'intégration de la question 2 de l'exercice 4. L'application F est propre car de source compacte et elle respecte l'orientation car $\sin \varphi$ est positif. Comme E est égal à $[0, L] \times \{0, \pi\}$, il est de mesure nulle. En une droite non critique D , le cardinal de $F^{-1}(D)$ est le nombre de paramètres s telle que D passe par $\gamma(s)$ (un seul φ peut correspondre), c'est-à-dire le cardinal de $C \cap D$. Enfin, on calcule $\int_{[0, L] \times [0, \pi]} \sin \varphi ds \wedge d\varphi$.

En toute rigueur, la formule d'intégration a été démontrée dans le cas de variétés sans bord mais on peut généraliser l'énoncé.