Géométrie Différentielle, TD 6 du 23 mars 2015

1. Éclatement

Soit $n \geqslant 1$. On rappelle que l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est défini comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$ et a été muni d'une structure de sous-variété des matrices (symétriques) de taille (n, n). On a de plus montré au TD précédent que l'application naturelle $p : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local.

On note $E_n = \{(x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \mid x \in X\}$.

1– Montrer que E_n est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

2– Soit π la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E_n \backslash \pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et que $\pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

3– Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une immersion $\mathcal{C}^1$. Supposons que la restriction de γ à l'ensemble $I \backslash \gamma^{-1}(0)$ soit injective et que, pour $s \neq t$ dans I avec $\gamma(s) = \gamma(t) = 0$, on ait $\mathbb{R}\gamma'(s) \neq \mathbb{R}\gamma'(t)$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\widetilde{\gamma} : I \to E_n$ telle que $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$; montrer de plus que $\widetilde{\gamma}$ est injective.

2. Morphismes de groupes, applications de rang constant

On considère G et H, des sous-groupes de $GL_{n_1}(\mathbb{R})$ et $GL_{n_2}(\mathbb{R})$, qui sont également des sous-variétés. Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme $\mathcal{C}^\infty$ de groupes.

1– Montrer que φ est de rang constant.

2– On suppose φ localement injective. Montrer que φ est une immersion.

3– On suppose φ surjective. Montrer que φ est une submersion.

3. $SU(2)$ et $SO(3)$

1– Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$.

2– Soit V l'espace vectoriel des matrices complexes de taille 2, antihermitiennes et de trace nulle. Exhiber un produit scalaire sur V qui soit invariant par l'action par conjugaison de $SU(2)$ sur V.

3– En déduire l'existence d'un morphisme injectif de groupes (abstraits) $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

4– Montrer qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme de groupes.

5– Montrer que $SO(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

4. Quaternions

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ à l'espace des quaternions $\mathbb{H}$. La *norme* d'un quaternion est sa norme euclidienne dans $\mathbb{R}^4$; on montre aisément que la norme est multiplicative pour le produit sur les quaternions.

1– Montrer que la sphère $\mathbb{S}^3$ est un sous-groupe des inversibles de $\mathbb{H}$. On note désormais $G = \mathbb{S}^3$.

2– Montrer que l'action par conjugaison de G sur $\mathbb{H}$ induit un morphisme de groupes $\mathcal{C}^\infty$ de G dans $SO(4)$.

3– Montrer qu'en fait ce morphisme peut être vu à valeurs dans $SO(3)$.

4– Calculer le noyau de ce morphisme, et retrouver l'isomorphisme $SO(3) \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Remarque 1. *On peut montrer que les sphères $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^3$ sont les seules qui admettent une structure de groupe, compatible à leur structure de sous-variété.*

L'utilisation des quaternions permet aussi de montrer l'isomorphisme

$$PSO(4) := SO(4)/\pm \cong SO(3) \times SO(3).$$

Le groupe $PSO(n)$ est simple (abstraitement), pour tout n, sauf $n = 4$. Pour ces questions, voir par exemple le cours d'algèbre de Daniel Perrin.