**Géométrie Différentielle, TD 6 du 23 mars 2015**

## 1. Éclatement

Soit $n \geqslant 1$. On rappelle que l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est défini comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$ et a été muni d'une structure de sous-variété des matrices (symétriques) de taille $(n, n)$. On a de plus montré au TD précédent que l'application naturelle $p : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local.

On note $E_n = \{(x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \mid x \in X\}$.

1– Montrer que $E_n$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension $n$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

2– Soit $\pi$ la projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E_n \backslash \pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et que $\pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

3– Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une immersion $\mathcal{C}^1$. Supposons que la restriction de $\gamma$ à l'ensemble $I \backslash \gamma^{-1}(0)$ soit injective et que, pour $s \neq t$ dans $I$ avec $\gamma(s) = \gamma(t) = 0$, on ait $\mathbb{R}\gamma'(s) \neq \mathbb{R}\gamma'(t)$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\widetilde{\gamma} : I \to E_n$ telle que $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ ; montrer de plus que $\widetilde{\gamma}$ est injective.

**Solution :**

1– On va utiliser l'application $p : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. On définit

$$\widetilde{E}_n = \{(x, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \mid \exists t \in \mathbb{R} : x = tY\}.$$

C'est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$. En effet, on considère l'application $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ définie par $\varphi(v, t) = (t.v, v)$. C'est une immersion injective propre, donc un plongement, et son image est $\widetilde{E}_n$.

L'application $(id, p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local car $p$ en est un et l'image de $\widetilde{E}_n$ est manifestement $E_n$. Donc, $E_n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

2– L'application de $E_n \backslash \pi^{-1}(0)$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ donnée par $(x, X) \mapsto x$ est un difféomorphisme, d'inverse $x \mapsto (x, [x])$.

La première projection est un difféomorphisme entre $\pi^{-1}(0)$ et $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, d'inverse $X \mapsto (0, X)$.

3– Comme la projection $\pi$ est un homéomorphisme entre $E_n \backslash \pi^{-1}(0)$ et $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, il y a une unique manière de relever $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ en $\widetilde{\gamma}(t) \in E_n$ tel que $\pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Comme la dérivée de $\gamma$ ne s'annule pas, l'ensemble $\gamma^{-1}(0)$ est discret, et donc d'intérieur vide. Il existe donc au plus une manière de prolonger $\widetilde{\gamma}$ en une application continue.

Pour $t \in \gamma^{-1}(0)$, posons $\widetilde{\gamma}(t) = (0, [\gamma'(t)])$. Ainsi, on a bien $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. L'hypothèse $\mathbb{R}\gamma'(s) \neq \mathbb{R}\gamma'(t)$ si $s \neq t$ et $s, t \in \gamma^{-1}(0)$ assure que la courbe $\widetilde{\gamma}$ est simple.

Il reste à vérifier qu'elle est continue. C'est trivial hors de $\gamma^{-1}(0)$. Soit donc $t_0$ tel que $\gamma(t_0) = 0$. Soient $pr_1 : E_n \to \mathbb{R}^n$ et $pr_2 : E_n \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ les projections. Comme $pr_1 \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ est continue en $t_0$, il suffit de vérifier que $pr_2 \circ \widetilde{\gamma}$ est continue en $t_0$ pour conclure.

Pour $t$ proche de $t_0$, on écrit $[\gamma(t)] = [\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}]$. Donc, quand $t$ tend vers $t_0$, $[\gamma(t)]$ tend vers $[\gamma'(t_0)]$. Cela conclut.

## 2. Morphismes de groupes, applications de rang constant

On considère $G$ et $H$, des sous-groupes de $GL_{n_1}(\mathbb{R})$ et $GL_{n_2}(\mathbb{R})$, qui sont également des sous-variétés. Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme $\mathcal{C}^\infty$ de groupes.

1– Montrer que $\varphi$ est de rang constant.

2– On suppose $\varphi$ localement injective. Montrer que $\varphi$ est une immersion.

3– On suppose $\varphi$ surjective. Montrer que $\varphi$ est une submersion.

**Solution :**

1– Notons $R_g$ la multiplication à droite par l'élément $g$ dans le groupe $G$ ou le groupe $H$. Comme $\varphi$ est un morphisme, on a

$$R_{\varphi(g)} \circ \varphi = \varphi \circ R_g,$$

pour tout $g$ dans $G$. En différentiant en l'élément neutre $e$ de $G$, il vient :

$$d_{e'} R_{\varphi(g)} \circ d_e\varphi = d_g\varphi \circ d_e R_g.$$

En particulier, $d_g\varphi$ et $d_e\varphi$ sont égaux à des isomorphismes près d'espaces vectoriels. Ils ont donc même rang.

2– Dans cette question et la suivante, on utilise seulement le fait que $\varphi$ est de rang constant. On applique le lemme de forme normale des applications de rang constant ; par ce lemme, $\varphi$ ne peut être localement injective que si c'est une immersion.

3– On montre le résultat un peu plus fort : pour toute application surjective entre sous-variétés, il existe au moins un point où l'application est une submersion. Ceci conclut la question par l'hypothèse de rang constant. Et ce résultat est un corollaire immédiat du lemme de Sard.

## 3. $SU(2)$ et $SO(3)$

1– Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$.

2– Soit $V$ l'espace vectoriel des matrices complexes de taille 2, antihermitiennes et de trace nulle. Exhiber un produit scalaire sur $V$ qui soit invariant par l'action par conjugaison de $SU(2)$ sur $V$.

3– En déduire l'existence d'un morphisme injectif de groupes (abstraits) $\mathrm{SU}(2)/\pm 1 \to \mathrm{SO}(3)$.

4– Montrer qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme de groupes.

5– Montrer que $SO(3)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

**Solution :**

1– Soit $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$. L'égalité ${}^t\bar{x}x = I_2$ donne $|a|^2+|c|^2 = 1$ et $|b|^2+|d|^2 = 1$. L'égalité $x{}^t\bar{x} = I_2$ donne aussi $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $|c|^2 + |d|^2 = 1$. Ainsi, $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$.

De plus, $1 = \det(x) = ad - bc$. Par Cauchy-Schwarz,

$$1 \leqslant |ad| + |bc| = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz montre que $ad \in \mathbb{R}_+$ et $bc \in \mathbb{R}_-$. Ainsi, si $a = re^{i\theta}$, on a $d = re^{-i\theta}$, et si $b = r'e^{i\theta'}$ on a $c = -r'e^{-i\theta'}$. On a montré que $x$ était de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^3$. Réciproquement, une telle matrice appartient bien à $SU(2)$. Ainsi, la formule ci-dessus définit un difféomorphisme entre $\mathbb{S}^3$ et $SU(2)$.

2– L'espace $V$ est l'espace tangent de $SU(2)$ en l'identité. Ainsi, $SU(2)$ agit naturellement sur $V$ par conjugaison (c'est l'action Ad). Un élément $X = \begin{pmatrix} ix & -y+iz \\ y+iz & -ix \end{pmatrix}$ de $V$ a pour déterminant $x^2 + y^2 + z^2$. On définit alors une norme euclidienne sur $V$ par $\|X\| = \sqrt{\det(X)}$. Comme la conjugaison ne modifie pas le déterminant, cette norme est invariante sous l'action de $SU(2)$.

3– Soit $\Phi : SU(2) \to GL(V)$ l'action de $SU(2)$ par conjugaison sur $V$. Pour la norme de la question précédente, $\Phi$ prend ses valeurs dans $O(V)$. Comme $SU(2)$ est connexe, on a même $\Phi(SU(2)) \subset SO(V)$.

Si $g \in \ker(\Phi)$, alors $g$ commute avec toutes les matrices de $V$. Comme les matrices hermitiennes s'obtiennent en multipliant par $i$ les matrices anti-hermitiennes, $g$ commute alors à toutes les matrices de trace nulle. Donc, c'est une homothétie et $g = \pm I_2$. Ainsi, $\Phi$ induit un morphisme injectif $\widetilde{\Phi} : SU(2)/\{\pm I_2\} \to SO(V)$.

4– On considère le morphisme de groupes $\Psi : SU(2) \to SO(3)$ obtenu par la question précédente. Il est localement injectif, donc est une immersion par un exercice précédent. Par égalité des dimensions, c'est un difféomorphisme local. En particulier, $\Psi$ est une application ouverte. C'est aussi une application fermée par compacité. Donc, par connexité de $SO(3)$, $\Psi$ est surjective.

5– Il s'agit de vérifier que l'action par antipodie sur $\mathbb{S}^3$ correspond à l'action par $\pm Id$ sur $SU(2)$, *via* le difféomorphisme construit à la première question.

## 4. Quaternions

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ à l'espace des quaternions $\mathbb{H}$. La *norme* d'un quaternion est sa norme euclidienne dans $\mathbb{R}^4$ ; on montre aisément que la norme est multiplicative pour le produit sur les quaternions.

1– Montrer que la sphère $\mathbb{S}^3$ est un sous-groupe des inversibles de $\mathbb{H}$. On note désormais $G = \mathbb{S}^3$.

2– Montrer que l'action par conjugaison de $G$ sur $\mathbb{H}$ induit un morphisme de groupes $\mathcal{C}^\infty$ de $G$ dans $SO(4)$.

3– Montrer qu'en fait ce morphisme peut être vu à valeurs dans $SO(3)$.

4– Calculer le noyau de ce morphisme, et retrouver l'isomorphisme $SO(3) \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

**Remarque 1.** *On peut montrer que les sphères $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^3$ sont les seules qui admettent une structure de groupe, compatible à leur structure de sous-variété.*

*L'utilisation des quaternions permet aussi de montrer l'isomorphisme*

$$PSO(4) := SO(4)/\pm \cong SO(3) \times SO(3).$$

*Le groupe $PSO(n)$ est simple (abstraitement), pour tout $n$, sauf $n = 4$. Pour ces questions, voir par exemple le cours d'algèbre de Daniel Perrin.*

**Solution :**

1– La sphère $\mathbb{S}^3$ est le noyau de la norme, vu comme morphisme de groupes de $\mathbb{H} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}^{*,+}$.

2– L'action par conjugaison est un morphisme de groupes $G \to GL(\mathbb{H}) \cong GL_4(\mathbb{R})$. Comme il respecte la norme euclidienne, il arrive dans $O(4)$, et en fait dans $SO(4)$ par connexité de la sphère $\mathbb{S}^3$.

3– Le centre de $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1, sur lequel $G$ agit trivialement par conjugaison, par définition. Comme $G$ préserve le produit scalaire, $G$ préserve l'orthogonal de cet espace, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

4– Le noyau de ce morphisme est l'intersection du centre de $\mathbb{H}$ et de $G$. Il s'agit de $\{\pm 1\}$. En particulier, le morphisme $G \to SO(3)$ est localement injectif, donc est une immersion. Par égalité des dimensions, c'est un difféomorphisme local. On conclut en remarquant que l'action de $\pm 1$ sur $G$ s'identifie à l'action par antipodie sur $\mathbb{S}^3$.