Processus aléatoires
ENS Paris, 2018-2019

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 6 : Conditionnement, martingales, théorème d'arrêt
Corrigé

Mercredi 17 Octobre

1 Espérance conditionnelle dans L^2

Exercice 1
On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s..
2. On se place maintenant dans le cas général. En étudiant des quantités de la forme $\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{X\leq a}]$, montrer que $X = Y$ p.s..

Solution de l'exercice 1

1. On calcule
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - 2E\left[XY\right].$$
Or $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[Y|X]\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right]$ et de même $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[Y^2\right]$, donc $\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = 0$ et $X = Y$ p.s..
On peut aussi le voir autrement en utilisant l'interprétation de l'espérance conditionnelle dans L^2 : il existe deux projections orthogonales p et q telles que $p(X) = Y$ et $q(Y) = X$, donc
$$\|X\| = \|q(Y)\| \leq \|Y\|$$
et de même dans l'autre sens. On a donc égalité, donc $Y \in \mathrm{Im}(q)$, donc $X = q(Y) = Y$.
2. Soit $a \geq 0$. L'égalité
$$\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{X\leq a}\right] = \mathbb{E}\left[Y\mathbb{1}_{X\leq a}\right]$$
est une conséquence immédiate de la définition de l'espérance conditionnelle. Notons que le membre de gauche est fini, donc le membre de droite l'est aussi. L'égalité se réécrit
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{X\leq a}\right] = 0,$$
où la variable $(X-Y)\mathbb{1}_{X\leq a}$ est intégrable car c'est la différence de deux variables intégrables. De manière symétrique, on obtient
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\mathbb{1}_{Y\leq a}\right] = 0$$
donc, en faisant la différence des deux,
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)\left(\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a}\right)\right] = 0.$$
Or, si $\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a} > 0$ alors $Y \leq a < X$, et si $\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a} < 0$ alors $Y > a \geq Y$. La variable $(X-Y)\left(\mathbb{1}_{Y\leq a} - \mathbb{1}_{X\leq a}\right)$ est donc positive. Comme elle est d'espérance nulle, elle est nulle p.s.. On en déduit
$$\mathbb{1}_{Y\leq a} = \mathbb{1}_{X\leq a} \quad \text{p.s..}$$

Presque sûrement, ceci est vrai pour tout a rationnel positif, donc presque sûrement il n'existe pas de a rationnel tel que $X \leq a < Y$, d'où $X \geq Y$ p.s.. On a de même l'inégalité inverse, d'où $X = Y$ p.s..

Exercice 2 (Convergence L^2 des martingales rétrogrades)
Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série
$$\sum_{n\geq 0} (\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}])$$
converge dans L^2.
2. Montrer que si $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

Solution de l'exercice 2

1. On calcule, pour $m < n$:
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n])(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{m+1}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_m])\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{m+1}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_m] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_{m+1}] + \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_m]\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{m+1}]^2 - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_m]^2 - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{m+1}]^2 + \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_m]^2\right] \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$
ce qui montre que la famille $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}])_{n\geq 0}$ est orthogonale. De plus, pour $m = n$, on a
$$\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n])^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]^2 - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]^2\right],$$
donc par téléscopage $\sum \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_0\right]^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] < +\infty$, d'où la convergence de la série dans L^2, par critère de Cauchy dans L^2.
2. On déduit de la question précédente que $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_n\right]$ converge, on note Y la variable aléatoire limite. On n'a plus qu'à montrer que $Y = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_\infty\right]$. Soit Z une variable $\mathcal{F}_\infty$-mesurable bornée. En particulier, pour tout n, elle est $\mathcal{F}_n$-mesurable donc
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_n\right] Z\right] = \mathbb{E}\left[XZ\right].$$
Quand n tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $\mathbb{E}[YZ]$ (en utilisant la convergence de $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_n\right]$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz), d'où $\mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ]$, d'où $Y = \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_\infty\right]$.

Remarque Il est aussi possible de résoudre entièrement l'exercice en utilisant seulement le fait que L^2 est un espace de Hilbert. On vérifie facilement que le sous-espace des variables $\mathcal{F}_\infty$-mesurables est l'intersection décroissantes des sous-espaces des variables $\mathcal{F}_n$-mesurables. Il suffit donc de montrer que dans un espace de Hilbert, les projections orthogonales sur une suite décroissante de sous-espaces fermés convergent vers la projection orthogonale sur l'intersection de ces sous-espaces.

2 Lois conditionnelles

Exercice 3 (Un calcul de loi conditionnelle)
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. exponentielles de paramètre 1, et $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant S.

Solution de l'exercice 3 Soient f et g deux fonctions mesurables bornées. On cherche à calculer $\mathbb{E}[g(X_1)|S]$. Pour cela, on calcule

$$\mathbb{E}[g(X_1)f(S)] = \int_{\mathbb{R}_+^n} g(x_1)f(x_1 + \cdots + x_n)\lambda^n e^{-\lambda x_1} \ldots e^{-\lambda x_n} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

En faisant le changement de variables $s_i = x_1 + \cdots + x_i$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X_1)f(S)] &= \int_{0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n} g(s_1)f(s_n)\lambda^n e^{-\lambda s_n} \mathrm{d}s_1 \ldots \mathrm{d}s_n \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} \int_{0 \leq x \leq s} g(x)f(s)(s-x)^{n-2} e^{-\lambda s} \mathrm{d}x \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

en intégrant selon $s_2, \ldots, s_{n-1}$. En prenant pour g la fonction constante égale à 1, on obtient

$$\mathbb{E}[f(S)] = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} f(s)s^{n-1}e^{-\lambda s} \mathrm{d}s,$$

donc S a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s}.$$

On cherche à faire apparaître cette densité dans l'expression trouvée précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X_1)f(S)] &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} f(s)s^{n-1}e^{-\lambda s} \left(\int_0^s g(x)(n-1)\frac{(s-x)^{n-2}}{s^{n-1}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\ &= \mathbb{E}\left[f(S) \int_0^S g(x)(n-1)\frac{(S-x)^{n-2}}{S^{n-1}} \mathrm{d}x \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{E}[g(X_1)|S] = \int_0^S g(x)(n-1)\frac{(S-x)^{n-2}}{S^{n-1}} \mathrm{d}x.$$

Ceci est vrai pour toute fonction g mesurable bornée, donc la loi conditionnelle de X_1 sachant S a pour densité

$$(n-1)\frac{(S-x)^{n-2}}{S^{n-1}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons qu'en particulier, pour $n = 2$, cette densité est constante. Ainsi, conditionnellement à $X_1 + X_2$, la variable X_1 est uniforme sur $[0, X_1 + X_2]$.

Exercice 4 (Lois conditionnelles et indépendance)
Soient X et Y deux variables aléatoires telles que la loi conditionnelle de X sachant Y existe. Montrer que cette loi conditionnelle est déterministe si et seulement X et Y sont indépendantes.

Solution de l'exercice 4 Notons tout d'abord que ce résultat est intuitif : dire que la loi de X sachant Y est déterministe revient à dire que connaître Y ne donne aucune information sur X, ce qui est plus ou moins la définition de l'indépendance.

Plus précisément, supposons que X est indépendante de Y, et notons ν la loi de Y. On veut montrer que la loi conditionnelle de X sachant Y est ν (qui est, en particulier, déterministe). Pour cela, par définition des lois conditionnelles, il suffit de montrer que pour toute fonction f mesurable positive, on a

$$\mathbb{E}[f(X)|Y] = \int f \,\mathrm{d}\nu.$$

Par définition de l'espérance conditionnelle, il suffit donc de montrer que pour fonction g mesurable positive, on a

$$\mathbb{E}[g(Y)f(X)] = \mathbb{E}\left[g(Y) \int f \,\mathrm{d}\nu \right].$$

Or, en utilisant l'indépendance puis le fait que ν est la loi de X, on a

$$\mathbb{E}\left[g(Y)f(X)\right] = \mathbb{E}[g(Y)]\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[g(Y)] \int f \, \mathrm{d}\nu = \mathbb{E}\left[g(Y) \int f \, \mathrm{d}\nu\right],$$

ce qui prouve un des deux sens.

Pour l'autre sens, les calculs sont essentiellement les mêmes. Si la loi de X sachant Y est déterministe et égale à ν, alors pour toutes fonctions f et g mesurables positives, on a

$$\mathbb{E}\left[g(Y)f(X)\right] = \mathbb{E}\left[g(Y) \int f \, \mathrm{d}\nu\right] = \mathbb{E}[g(Y)] \times \int f \, \mathrm{d}\nu.$$

En particulier, en prenant $g = 1$, on obtient $\mathbb{E}[f(X)] = \int f \, \mathrm{d}\nu$, donc ν est aussi la loi de X, donc finalement

$$\mathbb{E}\left[g(Y)f(X)\right] = \mathbb{E}[g(Y)]\mathbb{E}[f(X)]$$

pour toutes f et g mesurables positives. Par conséquent, X et Y sont bien indépendantes.

3 Temps d'arrêt

Exercice 5 (Vrai ou faux)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$. Lesquelles des variables suivantes sont des temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)$?

1. $T_1 = \min\{n \geq 0 | S_n = 2018\}$,
2. $T_2 = \min\{n \geq 2018 | S_n = S_{n-2018}\}$,
3. $T_3 = \min\{n \geq 0 | S_n = S_{n+2018}\}$,
4. $T_4 = \min\{n \geq T_1 | S_n = 0\}$,
5. $T_5 = \max\{n \in [\![0, 2018]\!] | S_n = 0\}$,
6. $T_6 = \min\{n \in [\![0, 2018]\!] | \forall m \in [\![0, 2018]\!], S_m \leq S_n\}$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Les temps T_1, T_2 et T_4 sont des temps d'arrêts, car à chaque fois l'événement $\{T \leq n\}$ ne dépend que de $(S_0, S_1, \dots, S_n)$. En revanche, T_3, T_5 et T_6 n'en sont pas puisque les événements $\{T_3 = 0\}$, $\{T_5 = 0\}$ et $\{T_6 = 0\}$ ne sont pas $\mathcal{F}_0$-mesurables.

Exercice 6 (Ce qui peut arriver, arrivera)
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a p.s.

$$\mathbb{P}(T \leq n + n_0 | \mathcal{F}_n) > \varepsilon.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On montre par récurrence sur k que pour tout $k \geq 0$:

$$\mathbb{P}(T \geq k n_0) \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

C'est vrai pour $k = 0$ et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \geq (k+1)n_0) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq k n_0} \mathbb{1}_{T \geq (k+1)n_0}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq k n_0} \mathbb{P}\left(T \geq k n_0 + n_0 \mid \mathcal{F}_{k n_0}\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq k n_0} (1 - \varepsilon)\right] \\ &\leq (1 - \varepsilon)^{k+1}, \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. On en déduit aisément que $\mathbb{E}[T] < +\infty$ et en particulier que T est presque sûrement fini.

4 Martingales et marches aléatoires

Exercice 7 (À la pêche aux martingales)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \cdots S_n)$.

1. Montrer que (S_n) est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
4. Soit $P(X,Y)$ un polynôme à deux variables. Montrer que $(P(S_n, n))$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tous $s, n \in \mathbb{Z}$, on a
$$P(s+1, n+1) - 2P(s,n) + P(s-1, n+1) = 0.$$
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(\alpha S_n - \beta n)$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)$.

Solution de l'exercice 7 On note $X_n = S_n - S_{n-1}$ les pas de la marche aléatoire. Tous les processus considérés dans la suite sont des fonctions mesurables de n et de S_n, donc sont $(\mathcal{F}_n)$-adaptés. De plus, au temps n, ils sont toujours bornés par une fonction de n (n pour le premier, $n^2 + n$ pour le second...), donc intégrables.

1. On a
$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n$$
par indépendance des accroissements.
2. On a
$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[S_n^2|\mathcal{F}_n\right] + 2S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] = S_n^2 + 1.$$
On a donc $\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n\right] = S_n^2 - n$, donc on a bien une martingale.
3. Le calcul est similaire :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(S_{n+1})^3 - 3(n+1)S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= S_n^3 + 3S_n^2\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] + 3S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^3|\mathcal{F}_n\right] \\ &- 3(n+1)\mathbb{E}\left[S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= S_n^3 + 3S_n - 3(n+1)S_n \\ &= S_n^3 - 3nS_n.\end{aligned}$$
4. On calcule
$$\mathbb{E}\left[P(S_{n+1}, n+1)|\mathcal{F}_n\right] = \frac{1}{2}P(S_n+1, n+1) + \frac{1}{2}P(S_n-1, n+1).$$
Il suffit donc de $P(X+1, n+1) - 2P(X,n) + P(X-1, n+1) = 0$.
5. On calcule
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\alpha S_n}e^{\alpha X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= e^{\alpha S_n}\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}e^{\alpha S_n}.\end{aligned}$$
Il faut donc choisir $\beta = \ln(\mathrm{ch}(\alpha))$.

Exercice 8 (Temps de sortie)
Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a, b \geq 0$ et
$$T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

On pourra admettre dans un premier temps que $T < +\infty$ p.s. (c'est une conséquence de l'exercice 6).

1. En utilisant la première martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{P}\left(S_T = b\right) = \frac{a}{a+b}.$$
2. En utilisant la seconde martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, montrer que
$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

Solution de l'exercice 8

1. Soit $t > 0$. Alors $T \wedge t$ est un temps d'arrêt borné, auquel on peut appliquer le théorème d'arrêt :
$$\mathbb{E}[S_{T\wedge t}] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$
De plus, $T < +\infty$ p.s. donc $S_{T\wedge t}$ converge p.s. vers S_T, et on a $-a \leq S_{T\wedge t} \leq b$ pour tout t. Par convergence dominée, on a donc
$$\mathbb{E}[S_T] = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[S_{T\wedge t}] = 0.$$
D'autre part, en notant $p = \mathbb{P}\left(S_T = b\right)$, on a
$$0 = \mathbb{E}[S_T] = (1-p)(-a) + pb,$$
d'où $p = \frac{a}{a+b}$.
2. Soit $t > 0$. En appliquant le théorème d'arrêt à $S_n^2 - n$ et au temps d'arrêt $T \wedge t$, on obtient
$$\mathbb{E}[T \wedge t] = \mathbb{E}[S_{T\wedge t}^2].$$
Comme dans la première question, en utilisant $T < +\infty$ p.s., le membre de gauche converge vers $\mathbb{E}[T]$ par convergence monotone et le membre de droite vers $\mathbb{E}[S_T^2]$ par convergence dominée. On a donc, en utilisant la première question :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[S_T^2] \\ &= \frac{b}{a+b}(-a)^2 + \frac{a}{a+b}b^2 \\ &= ab. \end{aligned}$$

Remarque Si vous n'êtes pas fatigués par les calculs : en utilisant la troisième martingale de l'exercice précédent (ainsi que les deux questions précédentes), on peut calculer
$$\mathbb{E}[T|S_T = b] = \frac{1}{3}\left(2ab + b^2\right).$$

Exercice 9 (Martingales et marche biaisée)
Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1-p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.
2. Soient a, b et T comme dans l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$.

Solution de l'exercice 9

1. On a $\mathbb{E}[\alpha^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = \alpha^{S_n}\mathbb{E}[\alpha^{X_{n+1}}] = \alpha^{S_n}\left(p\alpha + (1-p)\alpha^{-1}\right)$. Le processus (α^{S_n}) est donc une martingale ssi
$$p\alpha + (1-p)\alpha^{-1} = 1,$$
ce qui est une équation de degré 2 en α. En la résolvant, on obtient $\alpha = 1$ (ce qui n'est pas très intéressant) ou $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

2. En reprenant exactement le raisonnement de l'exercice précédent (question 1), on trouve

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{1-\alpha^a}{1-\alpha^{a+b}}$$

avec $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

Notons que si par exemple $p > \frac{1}{2}$, alors $\alpha < 1$ donc, en faisant tendre b vers $+\infty$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(T_{-a} < +\infty\right) = 1 - \alpha^a = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a$$

pour $a \geq 0$, où $T_{-a} = \min\{n \geq 0 | S_n = -a\}$. On en déduit que $-\min\{S_n | n \geq 0\}$ suit une loi géométrique de paramètre $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

Exercice 10 (Un contre-exemple)
Trouver un processus $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $E[|M_n|] < +\infty$ pour tout $n \geq 0$ et tel que $E[M_{n+1} \mid M_n] = M_n$ pour tout $n \geq 0$, mais sans que M soit une martingale.

Solution de l'exercice 10 On considère une marche aléatoire simple démarrant de 0 avec des pas indépendants ± 1, mais au premier retour en 0, la marche est obligée de faire le même pas que son tout premier. Pour $n \geq 1$, on a alors

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = \begin{cases} M_n & \text{si } M_n \neq 0, \\ -1 & \text{si } M_n = 0 \text{ et } M_1 = -1, \\ 1 & \text{si } M_n = 0 \text{ et } M_1 = 1. \end{cases}$$

En particulier, $\mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \neq M_n$ si $M_n = 0$, donc M n'est pas une martingale.

Exercice 11 (Une fausse blague)
Un mathématicien, un économiste et un trader discutent dans un bar. L'économiste dit :
« La valeur en euros d'un dollar au cours du temps est une martingale ! Sinon, il serait possible de gagner de l'argent en moyenne, en achetant et vendant des dollars au bon moment ! »
Le mathématicien répond :
« Mais si cela est vrai, d'après l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle, la valeur en dollars d'un euro est une sous-martingale ! »
Le trader ne dit rien, réfléchit quelques secondes, puis s'enfuit en courant pour aller acheter des euros. Qu'en pensez-vous ?

Solution de l'exercice 11 Pour commencer, le mathématicien a bien sûr raison. Soit M une martingale strictement positive pour une filtration $(\mathcal{F}_n)$. La fonction inverse est convexe, donc l'inégalité de Jensen conditionnelle donne

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^{-1}|\mathcal{F}_n\right] \geq \mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]^{-1} = M_n^{-1},$$

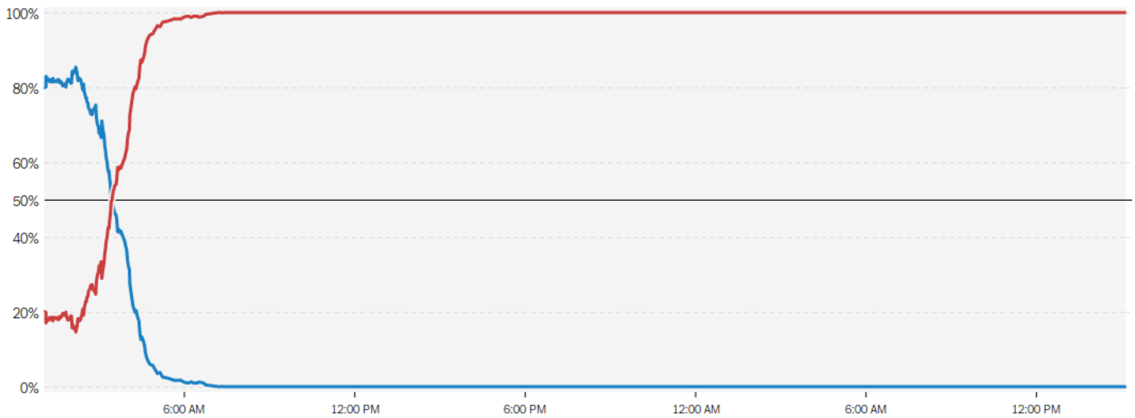
donc $(M_n^{-1})_{n\geq 0}$ est bien une sous-martingale. De plus, si M_{n+1} n'est pas $\mathcal{F}_n$-mesurable (ce qui doit être le cas en pratique), alors l'inégalité est stricte. Enfin, si M_n est la valeur en euros d'un dollar, alors M_n^{-1} est la valeur en dollars d'un euro, donc le cours euro/dollar serait une sous-martingale stricte.

Le raisonnement du trader est le suivant. Si le cours euro/dollar est une sous-martingale stricte, alors en achetant des euros aujourd'hui pour le revendre demain, l'espérance du gain en dollar est strictement positive. Il faut donc le faire ! D'un autre côté, cette réaction semble bizarre : elle suggère qu'on aurait systématiquement intérêt à acheter des euros pour les vendre le lendemain, alors que le même raisonnement donnerait l'inverse si on échangeait les rôles de l'euro et du dollar. C'est donc que l'affirmation de l'économiste doit être fausse : le taux euro/dollar et le taux dollar/euro seraient tous les deux des sous-martingales !

Cela signifierait qu'en achetant un jour des euros et en les revendant le lendemain, l'espérance de gains en dollars serait positive. On a donc à nouveau l'impression de pouvoir gagner à tout les coups ! Cependant, le cas où l'on gagne des dollars est le cas où le cours du dollar a baissé, donc si on se retrouve avec plus de dollars, alors chacun de ces dollars vaut moins qu'au début. On a donc une espérance de gains en dollars positive, mais une fois les dollars convertis en marchandises, l'espérance de gain devrait devenir nulle.

5 Deux images intéressantes

Exercice 12



1. Les images ci-dessus ont-elles l'air de représenter des martingales ?
2. Que représentent-elles ? Expliquer pourquoi les processus représentés devraient être des martingales.
3. Que peut-on en conclure ?

Solution de l'exercice 12

1. La première image ne ressemble pas à une martingale, car le processus observé a tendance à continuer à augmenter s'il vient d'augmenter, et à diminuer s'il vient de diminuer. Une martingale devrait en moyenne autant augmenter que diminuer si elle vient d'augmenter.

   Pour la seconde, c'est difficile à dire : le processus semble progresser par grands sauts. Comme on n'observe qu'un petit nombre de ces sauts, on ne peut pas vraiment se faire une idée de leur loi.
2. La première image vient du site du New York Times, la nuit des dernières élections présidentielles américaines. À chaque instant t, un algorithme donnait en direct, en fonction des résultats partiels disponibles à l'instant t, la probabilité que chacun des deux candidats remporte l'élection présidentielle.

   Si on note $\mathcal{F}_t$ la tribu engendré par les résultats partiels disponibles à l'instant t, alors $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration, et le processus à l'instant t devrait être égal à la probabilité, conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, qu'un certain candidat remporte l'élection. Or, si $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration et X une variable aléatoire, on sait que $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t])_{t\geq 0}$ est une martingale.

   La seconde image vient du site Five Thirty Eight. Elle a été obtenue en suivant la même idée, mais en cherchant à prédire le résultat final d'un match de foot. Les sauts correspondent aux buts marqués par une des deux équipes, le sens d'un saut indiquant l'équipe qui vient de marquer.

3. On peut en conclure que l'algorithme utilisé par le New York Times n'est probablement pas tout à fait au point : au moment où les courbes se sont croisées, le candidat rouge avait en fait déjà de fortes chances de remporter l'élection. Pour l'algorithme de Five Thirty Eight, il est plus difficile de se prononcer (d'autant que le match étudié a été choisi exprès pour la forme "intéressante" de la courbe).