TD 7 – Théorème de Radon-Nikodym, approximations

1 – Théorème de Radon-Nikodym et absolue continuité

Exercice 1. (*Contre-exemple*) Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ c'est-à-dire que $m(A) = \#A$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$. On note m_0 la restriction de m à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à m_0.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot m_0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.
3. Conclure.

Corrigé.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $m_0(A) = 0$. Alors $A = \emptyset$ et donc $\lambda(A) = 0$.
2. Supposons qu'il existe une telle fonction f. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x\}} f \,\mathrm{d}m_0 = f(x).$$
Ainsi $f = 0$ puis $\lambda = 0$. Contradiction.
3. La mesure μ_0 n'est pas σ-finie et le théorème de Radon-Nikodym ne s'applique pas.

Exercice 2. (*Quantification de l'absolue continuité*) Soit μ et ν des mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,
$$\mu(A) \leq \eta \Rightarrow \nu(A) \leq \varepsilon.$$
Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie.
3. Que se passe-t-il si ν est infinie ?

Corrigé.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\nu(A) \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\nu(A) = 0$.
2. On suppose que l'assertion n'est pas vérifiée. Soit $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Notons $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$ pour tout $n \geq 1$ et $B = \bigcap_{n\geq 1} B_n$. Alors d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a $\mu(B) = 0$, puis $\nu(B) = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $\nu(B_n) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon$. Et la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion. La mesure ν étant finie, on en déduit que
$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) \geq \varepsilon,$$
ce qui est contradictoire.
Attention. On ne peut pas dire que μ a une densité par rapport à ν : ν est finie mais μ n'est pas nécessairement σ-finie, donc on ne peut pas utiliser le théorème de Radon-Nikodym.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

3. Lorsque ν est infinie, cela n'est plus forcément vrai, même si μ et ν sont σ-finies. Par exemple, en prenant μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et ν la mesure absolument continue par rapport à μ de densité $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Alors, pour tout $\eta > 0$, on a $\mu([x, x+\eta]) = \eta$ et
$$\nu([x, x+\eta]) = \int_x^{x+\eta} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x+\eta} - \mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty,$$
ce qui montre que la quantification de l'absolue continuité est fausse dans ce cas.

2 – Approximations et convolution

Exercice 3. (*Continuité de l'opérateur de translation*) Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x-h)$.

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
2. On suppose $p < \infty$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.
   (a) Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \to 2^{1/p} \|f\|_p$ quand $|h| \to \infty$.

   Indication. On pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.
3. Que deviennent les résultats de la question 2. si $p = \infty$?

Corrigé.

1. Pour $p = \infty$ c'est clair, et, pour $p < \infty$, il suffit de faire un changement de variable $x \mapsto x - h$.
2. Soit f une fonction continue à support compact K. Montrons (a) et (b) pour f.
   (a) La fonction f est donc uniformément continue. On a, pour tout $\|h\| < 1$,
   $$\|\tau_h f - f\|_p^p \leq \lambda(K + B(0,1)) \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p,$$
   et $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p \to 0$ quand $h \to 0$ (une autre possibilité est d'utiliser le théorème de convergence dominée).
   (b) Soit h tel que $\|h\| > \mathrm{diam}(K)$. Alors les supports de $\tau_h f$ et f sont disjoints. On a donc
   $$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_p^p &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathrm{d}x \\ &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(f)\}} \, \mathrm{d}x + \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, \mathbb{1}_{\{x \in \mathrm{supp}(\tau_h f)\}} \, \mathrm{d}x \\ &= \|f\|_p^p + \|\tau_h f\|_p^p = 2\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

   Soit maintenant $f \in L^p$ et $\varepsilon > 0$. On peut trouver une fonction g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $h \geq 0$,
   $$\|\tau_h g - g\|_p - \|\tau_h g - \tau_h f\|_p - \|g - f\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h g - g\|_p + \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|g - f\|_p,$$
   c'est à dire
   $$-2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$
   Ainsi, on a
   $$\limsup_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon,$$
   et
   $$2^{1/p}\|f\|_p - (2 + 2^{1/p})\varepsilon \leq \liminf_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq \limsup_{|h| \to \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq (2 + 2^{1/p})\varepsilon + 2^{1/p}\|f\|_p.$$
   Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que f vérifie (a) et (b).

3. Dans le cas où $p = +\infty$, les résultats ne sont plus vrais. En effet, en posant $f = \mathbb{1}_{[0,1]^d}$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ donc $\|\tau_h f - f\|_\infty \not\to 0$ quand $h \to 0$. De même en posant $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ on a $\|\tau_h g - g\|_\infty = 0$ et donc $\|\tau_h g - g\|_\infty \not\to 2^{1/p}$ quand $|h| \to \infty$.

Exercice 4. (*Convolution $L^p - L^1$*) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Corrigé. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On a, en remarquant que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1 + |a|^p$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)| \,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p |g(x-y)| \,\mathrm{d}y + \|g\|_1 .$$

Pour montrer que cette dernière intégrale est finie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on va l'intégrer par rapport à x :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p |g(x-y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)| \,\mathrm{d}x |f(y)|^p \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \|g\|_1 |f(y)|^p \,\mathrm{d}y = \|g\|_1 \|f\|_p^p < \infty.$$

On en déduit que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p |g(x-y)| \,\mathrm{d}y < \infty$$

et donc $f * g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 5. (*Approximation de Dirac*) Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continues bornées est appelée *approximation de Dirac* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

1. Montrer que, si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue bornée et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac, alors $f * \varphi_n \to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.
2. Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac, alors $f * \varphi_n \to f$ dans L^p.
   Indication. On pourra utiliser l'inégalité suivante (voir l'exercice 4 du DM 2). Soit $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour λ-p.t. $x \in \mathbb{R}^d$, $\psi(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Soit F la fonction définie pour λ-p.t. $x \in X$ par $F(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,y) \,\mathrm{d}y$. Alors, pour tout $p \in [1, \infty[$, on a
   $$\|F\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\psi(\cdot, y)\|_p \,\mathrm{d}y.$$
3. Construire une approximation de Dirac $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les φ_n soient de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.

Corrigé.

1. On sait que $f * \varphi_n$ est défini sur tout $\mathbb{R}^d$ car f est bornée et φ_n est intégrable (voir la question 1. de l'exercice 4 du TD 6).
   Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $x \in K$. Comme $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = 1$, on a
   $$\begin{aligned} |f * \varphi_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) \varphi_n(y) \,\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| \varphi_n(y) \,\mathrm{d}y \\ &\leq \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)| \varphi_n(y) \,\mathrm{d}y + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y) \,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$. Comme $K + \overline{B}(0,1)$ est compact, f est uniformément continue dessus et donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $x,z \in K + \overline{B}(0,1)$ tels que $\|x - z\| \leq \varepsilon$, on ait $|f(z) - f(x)| \leq \eta$. Ainsi pour $x \in K$ et $y \in B(0,\varepsilon)$, on a $|f(x-y) - f(x)| \leq \eta$ et donc

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in K} |f * \varphi_n(x) - f(x)| &\leq \eta \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leq \eta + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

En utilisant que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |f * \varphi_n(x) - f(x)| \leq \eta$$

et, en faisant tendre η vers 0, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |f * \varphi_n(x) - f(x)| = 0,$$

ce qui veut exactement dire que $f * \varphi_n \to f$ uniformément sur K.

2. Remarquons tout d'abord que $f * \varphi_n$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$ par l'exercice 4. On applique ensuite l'inégalité de l'indication à $\psi(x,y) := (f(x-y) - f(x))\varphi_n(y)$ qui est bien intégrable en y pour λ-p.t. $x \in \mathbb{R}^d$ (toujours par l'exercice 4). En outre, on a $F = f * \varphi_n - f$, et on obtient

$$\begin{aligned}
\|f * \varphi_n - f\|_p &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |(f(x-y) - f(x))\varphi_n(y)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\tau_y f(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

où τ_y est l'opérateur de translation introduit à l'exercice 3. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f * \varphi_n - f|^p \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} (\|\tau_y f\|_p + \|f\|_p)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y + \sup_{h\in B(0,\varepsilon)} \|\tau_h f - f\|_p \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leq 2\|f\|_p \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y)\,\mathrm{d}y + \sup_{h\in B(0,\varepsilon)} \|\tau_h f - f\|_p \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,
\end{aligned}$$

en utilisant que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac et la continuité en 0 de l'opérateur de translation (question 2.(a) de l'exercice 3).

3. On construit d'abord $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\,\mathrm{d}\lambda = 1$. On pose

$$\theta\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2} \mathbb{1}_{x>0},$$

qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, car toutes les dérivées à droite en 0 sont nulles. On pose alors $\psi\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \theta(1-x)\theta(1+x)$ qui est non nulle, positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de support $[-1,1]$ compact. On pose alors $\Phi\colon x \in \mathbb{R}^d \mapsto \psi(x_1^2 + \cdots + x_d^2)$ qui est positive $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $\overline{B}(0,1)$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ finie et strictement positive. Enfin, on pose

$$\varphi := \frac{\Phi}{\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x)\,\mathrm{d}x},$$

qui vérifie les propriétés souhaitées.

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Alors φ_n est positive de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact $\overline{B}(0,1/n)$ et d'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = 0,$$

dès que $n \geq \varepsilon^{-1}$. Ainsi, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac telle que les φ_n soient de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.

Remarque. Il est intéressant d'avoir une approximation de Dirac de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact pour avoir le plus de régularité possible après convolution par φ_n. Il est aussi parfois pratique de considérer une approximation de Dirac spécifiquement construite par "scaling" d'une seule fonction.

Exercice 6. (*Approximation $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p*) . Montrer que pour tout $p \in [1,\infty[$, l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Corrigé. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Par convergence dominée, on a $\mathbb{1}_{[-k,k]^d} f \to f$ dans L^p quand $k \to \infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - \mathbb{1}_{[-k,k]^d} f\|_p \leq \varepsilon/2$. On pose $K := [-k,k]^d$.
Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'approximation de Dirac construite dans la question 3. de l'exercice 5. Comme $\mathbb{1}_K f \in L^1_{\text{loc}}$ et les φ_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on sait par l'exercice 4 du TD 6 que $(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n$ est défini partout et est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Montrons que $(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n$ est à support compact. On pose $K_n := \operatorname{supp}\varphi_n$ qui est compact. On a

$$(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(x-y) f(x-y)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_n(y)\mathbb{1}_{(x-K)\cap K_n}(y)\,\mathrm{d}y$$

On remarque alors que

$$(x-K)\cap K_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists k \in K, \exists k' \in K_n : x - k = k' \Leftrightarrow x \in K + K_n$$

et donc $\operatorname{supp}((\mathbb{1}_K f) * \varphi_n) \subset K + K_n$ qui est compact. Donc $(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Enfin, comme $\mathbb{1}_K f \in L^P(\mathbb{R}^d)$, par la question 2. de l'exercice 5, on obtient que $(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n \to \mathbb{1}_K f$ dans L^p. Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n - \mathbb{1}_K f\| \leq \varepsilon/2$, et ainsi $\|(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n - f\| \leq \varepsilon$: on a approché f dans L^p par une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Remarque. Cela ne constitue pas une nouvelle preuve du fait que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1,\infty[$, car, si l'on remonte les exercices, on voit que l'on a utilisé ce résultat pour montrer la question 2.(a) de l'exercice 3.

Exercice 7. (*Approximation $\mathcal{C}_c^\infty$ de fonctions plateau*) Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset U$. Montrer qu'il existe f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\mathbb{1}_K \leq f \leq \mathbb{1}_U$.

Corrigé. Puisque K est un compact, $d(K, U^c) = c > 0$. Soit ϕ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support inclus dans $[-c/3, c/3]^d$ et d'intégrale 1 (voir la question 3 de l'exercice 5 pour la construction d'une telle fonction), alors

$$f := \mathbb{1}_{K+[-c/3;c/3]^d} * \phi$$

convient. En effet, l'écriture

$$f(x) = \int \mathbb{1}_{K+[-c/3;c/3]^d}(x-u)\phi(u)\,\mathrm{d}u = \int_{[-c/3;c/3]^d} \mathbb{1}_{K+[-c/3;c/3]^d}(x-u)\phi(u)\,\mathrm{d}u$$

montre aisément que $f(x) = 1$ si $x \in K$ et $f(x) = 0$ si $x \in U^c$. En outre, il est clair que f est à valeurs dans $[0,1]$ et, par la question 2 de l'exercice 4 du TD 6, on voit également que f est de classe C^∞ (car $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Chercher des exercices des partiels des années précédentes, dont les énoncés sont disponibles sur le site d'enseignement du DMA (http ://www.math.ens.fr/enseignement) dans l'onglet *Archives pédagogiques* puis *Annales d'examens*.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 8. (*L'espace* $\mathcal{M}(\mathbb{R})$) On note $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$.

1. Pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, on pose $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathcal{M}(\mathbb{R}), \|-\|)$ est un espace de Banach.
2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que pour tout $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$:
$$\|f\|_1 = \|f \cdot \mu\|,$$
où $(f \cdot \mu)$ est la mesure absolument continue par rapport à μ de densité f.

Corrigé.

1. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|-\|$.
Étape 1. Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ et $n, p \geq 1$, on a $|\mu_n(A) - \mu_p(A)| \leq \|\mu_n - \mu_p\|$, ce qui implique que la suite $(\mu_n(A))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et converge donc vers une limite notée $\mu(A)$.
Étape 2. Montrons que μ est une mesure. Prouvons tout d'abord que :
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)| : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = 0. \tag{1}$$
À cet effet, soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 > 1$ tels que $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \varepsilon$ pour $n, k \geq n_0$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On choisit $k > n_0$ tel que $|\mu(A) - \mu_k(A)| < \varepsilon$. Alors pour $n > n_0$:
$$|\mu(A) - \mu_n(A)| \leq |\mu(A) - \mu_k(A)| + |\mu_k(A) - \mu_n(A)| \leq \varepsilon + \|\mu_n - \mu_k\| \leq 2\varepsilon,$$
ce qui prouve (1).
Ensuite, les mesures μ_n sont en particulier finiment additives, ce qui implique aisément que μ est finiment additive. Montrons maintenant que μ est σ-finie. Soient $(A_i)_{i\geq 1}$ des boréliens disjoints et $\varepsilon > 0$. D'après (1), il existe $n_0 > 0$ tel que pour $n \geq n_0$:
$$\sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)| : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \leq \varepsilon.$$
On choisit ensuite $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$:
$$\mu_n\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right) \leq \varepsilon.$$
En particulier, ceci implique que pour $k \geq k_0$:
$$\mu\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right) \leq 2\varepsilon.$$
Par additivité (finie) de μ, on obtient finalement pour tout $k \geq k_0$:
$$\left|\mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) - \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\right| = \mu\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right) \leq 2\varepsilon.$$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la σ-additivité de μ en découle, ce qui prouve que μ est une mesure.
Étape 3. On vérifie que $|\mu_n - \mu| \to 0$. Ceci découle immédiatement de (1) et de l'inégalité
$$\|\nu\| = \nu(X^+) + |\nu(X^-)| \leq 2\sup\{|\nu(A)|; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$
vérifiée pour une mesure signée ν sur $\mathbb{R}$ (où on a noté $X^\pm$ les supports de $\nu^\pm$).

2. Il suffit de remarquer que l'écriture $f \cdot \mu = f^+ \cdot \mu - f^- \cdot \mu$ est la décomposition de Hahn de $f \cdot \mu$, ce qui implique :

$$\|f \cdot \mu\| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \|f\|_1.$$

Exercice 9. (*Fonctions à variation finie*) Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
   (b) Il existe une mesure signée μ sur $[a,b]$ telle que $f(x) = \mu([a,x])$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (c) f est continue à droite et *à variation finie*, c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante

$$\sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$

   Indication. On pourra utiliser l'existence de la mesure de Stieljes (voir l'exercice 2 du DM 2).
2. Donner un exemple de fonction continue de $[0,1] \to \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation finie.

Corrigé.

1. (a) $\Rightarrow$ (b) : On suppose que $f = g - h + f(a)$ avec g et h croissantes, continues à droite et $g(a) = h(a) = 0$. Soit ν_g (resp. ν_h) la mesure de Stieljes associée à g (resp. h). Posons

$$\mu = \nu_g - \nu_h + f(a)\delta_a.$$

   Alors μ est une mesure signée sur $[a,b]$ telle que $f(x) = \mu([a,x])$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (b) $\Rightarrow$ (c) : Il est évident que f est continue à droite. Soient $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ vérifiant $a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq b$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n-1} |\mu(]a_{i-1}, a_i])| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\mu|(]a_{i-1}, a_i]) \leq |\mu|([a,b]).$$

   Donc f est à variation bornée.
   (c) $\Rightarrow$ (a) : Pour tout $x \in [a,b]$, posons

$$V(x) := \sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq x} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

   Alors V est croissante. On peut donc définir pour tout $x \in [a,b]$,

$$g(x) := \lim_{y \downarrow x} V(y).$$

   Ainsi, g est croissante et continue à droite. Posons $h = g - f$. Alors h est continue à droite. Montrons que h est croissante. Soient $a \leq x < y \leq b$ et $\varepsilon > 0$. Pour tous $n \geq 2$ et $a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq x$, on a

$$\begin{aligned} V(y+\varepsilon) - f(y+\varepsilon) &\geq |f(y+\varepsilon) - f(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(y+\varepsilon) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(x) \\ &\geq V(x) - f(x). \end{aligned}$$

   Donc, $h(y+\varepsilon) \geq h(x)$ puis en faisant tendre ε vers 0 on obtient $h(y) \geq h(x)$.

2. La fonction $f : x \in]0,1] \mapsto x\cos(1/x)$, prolongée par continuité en 0 n'est pas à variation bornée : considérer la subdivision

$$0 < \frac{1}{n\pi} < \cdots < \frac{1}{3\pi} < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1,$$

qui donne une variation qui tend vers l'infini quand $n \to \infty$.

Exercice 10. (*Le retour du diable*) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ l'escalier du diable défini dans l'exercice 7 du TD 3. On note $\mathrm{d}f$ la mesure de Stieljes associée à f, qui est une mesure sur $[0,1]$ (voir l'exercice 2 du DM 2, on prolonge f par 0 sur $]-\infty,0[$ et par 1 sur $]1,\infty[$ pour se ramener à une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses souhaitées).

1. Montrer que $\mathrm{d}f$ est étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. La mesure $\mathrm{d}f$ a-t-elle des atomes ?

Corrigé.

1. Le support de la mesure $\mathrm{d}f$ est l'ensemble de Cantor triadique K_3, qui est de mesure de Lebesgue nulle. Ainsi $\mathrm{d}f$ et la mesure de Lebesgue sont étrangères.
2. La mesure $\mathrm{d}f$ n'a pas d'atomes, car la fonction croissante f est continue.

Exercice 11. (*Approximations encore*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. À l'aide du théorème de Lusin, montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telles que $f_n \to f$ λ-p.p. quand $n \to \infty$ et $\|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. À l'aide des résultats précédents du TD, montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telles que $f_n \to f$ λ-p.p. quand $n \to \infty$ et $\|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f est intégrable, il existe K_n un compact de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\int_{K_n^c} |f| \,\mathrm{d}\lambda \le \frac{1}{2^n}.$$

D'autre part, K_n est de mesure finie et $f\mathbb{1}_{K_n}$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$ nulle en dehors de K_n. Donc, d'après le théorème de Lusin, il existe $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue à support compact telle que

$$\lambda(\{f_n \ne f\mathbb{1}_{K_n}\}) \le \frac{1}{2^n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\lambda(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \le \lambda(\{|f_n - f\mathbb{1}_{K_n}| + |f\mathbb{1}_{K_n} - f| > \varepsilon\}) \le \lambda(\{f_n \ne f\mathbb{1}_{K_n}\}) + \lambda(\{|f\mathbb{1}_{K_n} - f| > \varepsilon\}).$$

Or par l'inégalité de Markov, on a

$$\lambda(\{|f\mathbb{1}_{K_n} - f| > \varepsilon\}) = \lambda(\{|f|\mathbb{1}_{K_n^c} > \varepsilon\}) \le \frac{\int_{K_n^c} |f| \,\mathrm{d}\lambda}{\varepsilon} \le \frac{1}{\varepsilon 2^n}.$$

On a donc montré que

$$\lambda(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \le \frac{1}{2^n} + \frac{1}{\varepsilon 2^n},$$

qui est une suite sommable en n. Donc, par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\lambda\left(\limsup_{n\to\infty}\{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\lambda\left(\left\{\limsup_{n\to\infty}|f_n - f| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Enfin, on en déduit que

$$\lambda\left(\left\{\limsup_{n\to\infty}|f_n - f| > 0\right\}\right) = \lambda\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\limsup_{n\to\infty}|f_n - f| > \frac{1}{k}\right\}\right) \le \sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda\left(\left\{\limsup_{n\to\infty}|f_n - f| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$

c'est-à-dire $f_n \to f$ λ-p.p.

2. On a montré que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ à l'exercice 6. Il existe donc une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \to f$ dans L^1. Elle admet donc une sous-suite convergeant λ-p.p. vers f d'après la petite question 2 du TD 4.

   Pour avoir la borne $\|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty$, on utilise que, toujours par l'exercice 6, on peut prendre f_n de la forme $f_n = (f\mathbb{1}_{K_n} * \varphi_n)$ avec K_n compact et φ_n positive d'intégrale 1. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|f_n(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d}\|f\|_\infty\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \|f\|_\infty$$

   c'est-à-dire $\|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty$.

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $f = g$ presque partout.

Corrigé. Pour tout choix de $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{]a,b[}$ est Lebesgue intégrable. On sait qu'il existe une suite $(h_n)_{n\ge 1}$ de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $h_n \to \mathbb{1}_{]a,b[}$ λ-p.p. lorsque $n \to \infty$. Avec notre hypothèse et la convergence dominée, cela implique que

$$\int f\,\mathbb{1}_{]a,b[}\,\mathrm{d}\lambda = \int g\,\mathbb{1}_{]a,b[}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Donc on conclut par l'exercice 3 du TD 3.

Exercice 13. (✯) Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On suppose que μ est de masse infinie et que pour toute fonction continue bornée $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a

$$\int f(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Est-ce que forcément $\mu(A) = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Corrigé. Montrons que c'est vrai si la mesure μ est finie sur tous les compacts (ce qui revient à dire que g est localement intégrable). Soit $a < b$ deux réels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction affine par morceaux sur $\mathbb{R}$ interpolant $(a - n^{-1}, 0)$, $(a, 1)$, $(b, 1)$ et $(b + n^{-1}, 0)$. Comme f_n est continue bornée, on a

$$\int f_n(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En outre, f_n converge simplement vers $\mathbb{1}_{[a,b]}$ quand $n \to \infty$ et est dominée par $\mathbb{1}_{[a-1,b+1]}$ qui est intégrable pour μ et pour $g \cdot \lambda$, donc en passant à limite dans l'égalité précédente grâce au théorème de convergence dominée, on obtient

$$\mu([a,b]) = g \cdot \lambda([a,b]).$$

Ainsi, μ et $g \cdot \lambda$ coïncident sur $\mathcal{C}$ la famille des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et est stable par intersection finie. En outre, on a $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n,n]$, où $[-n,n] \in \mathcal{C}$ et $\mu([-n,n]) < \infty$. Donc, par le théorème d'unicité pour les mesures σ-finies, on a $\mu = g \cdot \lambda$.
En revanche, si on ne fait aucune hypothèse sur μ, le résultat tombe en défaut, comme le montre le contre-exemple suivant (dû à Omar Mohsen). On commence par construire une fonction positive mesurable g d'intégrale infinie (pour la mesure de Lebesgue) sur tout intervalle ouvert. Soit $(r_n)_{n \geq 1}$ une énumération des rationnels, et considérons la fonction mesurable

$$h(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{x - r_n}} \mathbb{1}_{0 < x - r_n < 1}.$$

Posons $g = h^2$. On vérifie que h est intégrable, ce qui implique $h < \infty$ p.p. et donc $g < \infty$ p.p. En revanche, on vérifie que pour tous $a < b$:

$$\int_{]a,b[} g(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Soit alors μ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, de sorte que pour tous $a < b$:

$$\infty = \mu(]a,b[) = \int_{]a,b[} g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Maintenant, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue bornée, écrivons f comme limite croissante de fonctions en escalier :

$$f = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} \inf_{]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[} f \cdot \mathbb{1}_{]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}.$$

Le théorème de convergence monotone et (2) fournissent

$$\int f(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cependant, on a

$$1 = \mu(\{0\}) \neq \int_{\{0\}} g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

donc il n'est pas vrai que $\mu(A) = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 14. (✯) Trouver un espace topologique $\mathcal{T}$ et une mesure μ sur $(T, \mathcal{B}(T))$ de masse totale 1 qui ne soit pas tendue.

Corrigé. Soit X un ensemble non dénombrable, qu'on munit de la topologie co–dénombrable τ_x (les ouverts sont par définition $\emptyset$ et les sous-ensembles $B \subset X$ pour lesquels B^c est dénombrable). La tribu borélienne de X est alors constituée par les éléments B tels que B ou B^c soit dénombrable (en effet, on vérifie aisément que ces éléments forment une tribu).
Remarquons tout de suite que si $B \subset X$ est infini, alors B n'est pas compact. En effet, soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de B, posons $A = \{a_1, a_2, \ldots,\}$ et $B_n = A^c \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$. Alors $\cup_{n \geq 1} B_n$ est un recouvrement ouvert de B duquel on ne peut pas extraire un recouvrement fini.
Soit μ la mesure définie sur (X, τ_X) par :

$$\mu(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } B \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } B^c \text{ est dénombrable.} \end{cases}$$

Vérifions que μ est une mesure. À cet effet, considérons une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de sous-ensembles disjoints de X et posons $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. Si tous les B_n sont dénombrables, $\mu(B_n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $\mu(B) = 0$; on a bien $\mu(B) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n)$. Si un des B_n est de complémentaire dénombrable, tous les autres sont dénombrables car ils sont disjoints (s'en convaincre). Dans ce cas on a bien aussi $\mu(B) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n)$.
Il est clair en revanche que μ n'est pas tendue car d'après ce qu'on a vu précédemment les compacts ont mesure nulle.

Fin