Géométrie Différentielle, TD 7 du 9 avril 2014

1. Degré d'une application

1– Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞ qui coïncide avec l'identité hors d'un compact.
–Montrer que f se prolonge en une application C^∞ $\widetilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.
–Calculer $\deg(\widetilde{f})$ et montrer que f est surjective.

2– Soit M une variété à bord compacte orientée de dimension d, et N une variété compacte orientée de dimension $d-1$.
–Soit $f : M \to N$ une application C^∞. Montrer que $\deg(f|_{\partial M}) = 0$.
–En déduire qu'il n'existe pas d'application $f : M \to \partial M$ telle que $f|_{\partial M} = \mathrm{Id}$.

3– Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes ; on suppose que Q est non nul.
–Montrer que P/Q induit une application C^∞ $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
–Calculer $\deg(f)$.

2. Applications de la sphère dans elle-même

1– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ dont le degré n'est pas $(-1)^{n+1}$. Montrer que f admet un point fixe.

2– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré non nul, et supposons n pair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.

3– Montrer qu'il existe une application C^∞ de degré nul $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ telle que pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, $f(-x) \neq -f(x)$.

4– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré impair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.

3. Formes fondamentales et courbures principales

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface lisse. On appelle *seconde forme fondamentale* l'application bilinéaire définie sur T_pS par, $II_p(X_p, Y_p) = -\langle d_pn(X_p), Y_p\rangle$, où $p \in S$, $X_p, Y_p \in T_pS$ et $n : S \to \mathbb{R}^3$ est une normale unitaire (la seconde forme est donc définie au signe près).

1– Soit Y un champ de vecteurs sur S prolongeant Y_p, au voisinage de p. Montrer que

$$II_p(X_p, Y_p) = \langle n(p), d_pY(X_p)\rangle.$$

2– **Cas particulier :** Montrer que $II_p(X_p, X_p) = \langle n(p), \ddot{\gamma}(0)\rangle$, où γ est un chemin vérifiant $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = X$.

3– En déduire que la seconde forme fondamentale est symétrique. On appelle $K_1(p)$ et $K_2(p)$ ses valeurs propres (les courbures principales) et $K(p)$ leur produit.

4– Montrer que $K(p)$ coïncide avec la courbure de Gauss de S au point p.

4. Courbure de Gauss

1– Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

2– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface C^∞ compacte connexe orientée. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que la courbure de Gauss $K(x)$ en x soit strictement positive (on pourra considérer un point à distance maximale de l'origine).

3– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface C^∞ compacte connexe orientée qui n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2$. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que $K(x) = 0$. Réciproque ?

5. Surfaces à courbure négative

1– Soit $T = \{(\cos(v)/\cosh(u), \sin(v)/\cosh(u), u - \tanh(u)), u \in]0, +\infty[, v \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il s'agit d'une surface C^∞ connexe orientable : la tractricoïde.

2– Montrer que la courbure de Gauss de T est constante égale à -1.

3– Montrer que T est d'aire finie, et la calculer.

4– Soit $H \subset \mathbb{R}^3$ le fermé d'équation $x^2 + y^2 = z^2 + 1$. Montrer qu'il s'agit d'une surface C^∞ connexe orientable : l'hyperboloïde à une nappe.

5– Montrer que la courbure de Gauss de H est strictement négative et que H est d'aire infinie.

6. Theorema Egregium

On munit $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ de leurs structures euclidiennes canoniques $\langle .,. \rangle$. On admettra dans un premier temps la première question, qui est le Theorema Egregium de Gauss.

1– Soient $U \subset \mathbb{R}^3$ et $V \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces C^∞ de courbures de Gauss K_U et K_V, et $\varphi : U \to V$ un difféomorphisme. Supposons que pour tout $x \in U$ et pour tout $v, w \in T_xU$, $\langle v, w \rangle = \langle d_x\varphi(v), d_x\varphi(w) \rangle$. Montrer que pour tout $x \in U$, $K_U(x) = K_V(\varphi(x))$.

2– Soit $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le tore et $C = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ le cylindre. Montrer que le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ induit un produit scalaire canonique sur les espaces tangents en chaque point de T et C.

3– Montrer qu'il est possible de plonger C dans $\mathbb{R}^3$ (resp. T dans $\mathbb{R}^4$) de sorte qu'en tout point $x \in C$ (resp. $x \in T$), le produit scalaire canonique sur T_xC (resp. T_xT) coïncide avec celui induit par $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^4$).

4– Montrer qu'il est impossible de plonger T dans $\mathbb{R}^3$ de sorte qu'en tout point $x \in T$, le produit scalaire canonique sur T_xT coïncide avec celui induit par $\mathbb{R}^3$.

5– Dans la question 1, φ est-il nécessairement induit par une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$?

6– Le réciproque de la question 1 est-elle vraie ? Plus précisément, en reprenant les notations de la question 1, si φ préserve la courbure de Gauss, φ préserve-t-il nécessairement le produit scalaire euclidien ?