Géométrie Différentielle, TD 7 du 30 mars 2015

1. Espace projectif

On considère l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ dont on écrit les points en coordonnées homogènes :

$$x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n].$$

Dans cette écriture, $(x_0, \ldots, x_n)$ est un vecteur non-nul appartenant à la droite de $\mathbb{R}^{n+1}$ représentée par le point x de $\mathbb{RP}^n$. En particulier, la multiplication par un scalaire non-nul de tous les x_i donne une autre représentation homogène de x.

Pour $i = 0, \ldots, n$, on note U_i le sous-ensemble de $\mathbb{RP}^n$ donné par la condition $x_i \neq 0$ (indépendante du représentant choisi). On pose $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$

$$f_i([x_0 : \ldots : x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}).$$

1– Montrer que les f_i sont des bijections et qu'elles munissent $\mathbb{RP}^n$ d'une structure de variété.

2– Montrer que cette structure de variété est la même que celle définie précédemment à l'aide de projecteurs orthogonaux. Montrer qu'elle coïncide aussi avec celle définie par quotient de la sphère sous l'action par antipodie (cf. exercice sur les quotients de variétés).

2. Application de Gauss

Soit M une hypersurface (c'est-à-dire une sous-variété de codimension 1) compacte $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit une application ψ de M dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en associant à x la droite vectorielle orthogonale à T_xM pour le produit scalaire canonique.

Montrer que ψ est $\mathcal{C}^\infty$, puis qu'elle est surjective.

3. Variétés quotients

Soit X une variété et Γ un groupe agissant par difféomorphismes sur X. On dit que l'action de Γ est *libre* si les stabilisateurs de tous les points de X sont triviaux. On dit que l'action est *proprement discontinue* si pour tout compact K de X, l'ensemble

$$\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$$

est fini.

Montrer que si l'action de Γ sur X est libre et proprement discontinue, alors il existe une unique structure de variété sur le quotient X/Γ telle que la projection canonique $\pi : X \to X/\Gamma$ est un difféomorphisme local.

4. Exemples de quotients

On considère les actions suivantes du groupe $\mathbb{Z}$ sur une variété X, engendrées par le difféomorphisme f de X. Déterminer dans quels cas l'action est libre et proprement discontinue. Identifier le quotient quand c'est le cas.

Dans le cas contraire, le quotient est-il séparé ? Localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$?

1– $X = \mathbb{R}^{+*}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

2– $X = \mathbb{R}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

3– $X = \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

4– $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(x,y) = (2x, y/2)$.

5. Encore un quotient

On fait agir le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ par rotation d'angle $2k\pi/n$.

1– Étudier cette action.

2– Munir le quotient $\mathbb{R}^2/\Gamma$ d'une structure de variété, qui le rend difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

3– Que dire de la projection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$?

6. Grassmanniennes

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et $0 \leqslant k \leqslant n$ un entier. On note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V. L'objet de cet exercice est de munir cet ensemble d'une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte.

Si B est un sous-espace vectoriel de dimension $n-k$ de V, on note U_B le sous-ensemble de $\mathcal{G}_k(V)$ constitué des supplémentaires de B. Soit A un supplémentaire de B. On note $\mathcal{L}(A,B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B. On définit

$$\begin{aligned} \psi_{A,B} : \mathcal{L}(A,B) &\to U_B \\ f \quad &\mapsto (\mathrm{Id} + f)(A) \end{aligned}$$

1– Montrer que $\psi_{A,B}$ est bien définie et bijective.

2– Montrer que le domaine de définition et l'image de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(A,B)$ et de $\mathcal{L}(A',B')$. Montrer que $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de son domaine de définition sur son image.

3– Montrer qu'il existe une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ telle que les U_B soient des ouverts et les $\psi_{A,B}$ des homéomorphismes. Vérifier que $\mathcal{G}_k(V)$ est séparé pour cette topologie.

4– Montrer que les $\psi_{A,B}$ forment un atlas munissant $\mathcal{G}_k(V)$ d'une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$.

5– Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est compacte.