Géométrie Différentielle, TD 7 du 30 mars 2015

1. Espace projectif

On considère l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ dont on écrit les points en coordonnées homogènes :

$$x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n].$$

Dans cette écriture, $(x_0, \ldots, x_n)$ est un vecteur non-nul appartenant à la droite de $\mathbb{R}^{n+1}$ représentée par le point x de $\mathbb{RP}^n$. En particulier, la multiplication par un scalaire non-nul de tous les x_i donne une autre représentation homogène de x.

Pour $i = 0, \ldots, n$, on note U_i le sous-ensemble de $\mathbb{RP}^n$ donné par la condition $x_i \neq 0$ (indépendante du représentant choisi). On pose $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$

$$f_i([x_0 : \ldots : x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}).$$

1– Montrer que les f_i sont des bijections et qu'elles munissent $\mathbb{RP}^n$ d'une structure de variété.

2– Montrer que cette structure de variété est la même que celle définie précédemment à l'aide de projecteurs orthogonaux. Montrer qu'elle coïncide aussi avec celle définie par quotient de la sphère sous l'action par antipodie (cf. exercice sur les quotients de variétés).

Solution :

1– Voir par exemple pp. 60–61 du livre de J. Lafontaine.

2– On a montré dans un précédent TD que la projection canonique de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{RP}^n$ (vu comme espace de projecteurs orthogonaux) était un difféomorphisme local et un revêtement à deux feuillets. De façon équivalente, cela signifie que la structure de variété quotient de $\mathbb{RP}^n$ coïncide avec sa structure de variété, induite par sa structure de sous-variété des matrices symétriques. On peut donc oublier les projecteurs orthogonaux : il suffit de montrer que la structure de variété quotient coïncide avec la structure de variété définie dans l'exercice. On note $\mathbb{RP}^n_1$ la variété quotient et $\mathbb{RP}^n_2$ la variété définie dans l'exercice.

Soit $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n_2$ la projection canonique. Montrons que c'est un difféomorphisme local. Soit $v = (v_0, \ldots, v_n)$ dans $\mathbb{S}^n$. L'un des v_i est non-nul, disons v_0 par symétrie. Supposons de plus $v_0 > 0$. Alors $\pi(v)$ est dans U_0. L'application $f_0 \circ \pi$ est bien définie sur l'ouvert V de $\mathbb{S}^n$ des vecteurs z tels que $z_0 > 0$ et il suffit de montrer que $f_0 \circ \pi : V \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme. Il s'agit bien sûr d'une bijection.

On a $f_0 \circ \pi(z_0, \ldots, z_n) = (\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0})$. De plus, si $y = (y_1, \ldots, y_n)$ est dans $\mathbb{R}^n$, alors $g(y) = \frac{(1, y_1, \ldots, y_n)}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}$ est dans V et g est l'inverse de $f_0 \circ \pi$. Comme tout est $\mathcal{C}^\infty$, $f_0 \circ \pi$ en restriction à V est bien un difféomorphisme. Donc, $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n_2$ est un difféomorphisme local. De plus, π a même valeur exactement sur les couples de points antipodaux. Par construction des variétés quotients, l'identité $\mathbb{RP}_1^n \to \mathbb{RP}_2^n$ est un difféomorphisme local et une bijection, donc un difféomorphisme.

2. Application de Gauss

Soit M une hypersurface (c'est-à-dire une sous-variété de codimension 1) compacte $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit une application ψ de M dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ en associant à x la droite vectorielle orthogonale à T_xM pour le produit scalaire canonique.

Montrer que ψ est $\mathcal{C}^\infty$, puis qu'elle est surjective.

Solution :

1– Soit $x_0 \in M$. La sous-variété M de $\mathbb{R}^{n+1}$ est définie sur un voisinage U de x_0 par l'équation $f = 0$ où $f : U \to \mathbb{R}$ est une submersion $\mathcal{C}^\infty$. L'application $\beta : x \mapsto df_x$ est également $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs dans $(\mathbb{R}^{n+1})^*$. Notons $\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \to (\mathbb{R}^{n+1})^*$ l'identification obtenue à l'aide du produit scalaire et $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la projection. Alors $\psi|_{U\cap M} = (\pi \circ \alpha^{-1} \circ \beta)|_{U\cap M}$, ce qui montre que ψ est $\mathcal{C}^\infty$ en x_0.

2– Soit $v \in \mathbb{S}^n$. La fonction $x \mapsto \langle x, v\rangle$ est continue sur M, elle y atteint donc son maximum en un point x_0. On va montrer que v est orthogonal à $T_{x_0}M$, ce qui conclura. Soit $u \in T_{x_0}M$. Il existe une courbe lisse $\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans M avec $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = u$. Soit alors $f : t \mapsto \langle \gamma(t), v\rangle$. Cette fonction a un maximum local en 0, par définition de x_0. En particulier, $f'(0) = 0$. Mais $f'(0) = \langle u, v\rangle$, donc v est bien orthogonal à tout vecteur de $T_{x_0}M$.

3. Variétés quotients

Soit X une variété et Γ un groupe agissant par difféomorphismes sur X. On dit que l'action de Γ est *libre* si les stabilisateurs de tous les points de X sont triviaux. On dit que l'action est *proprement discontinue* si pour tout compact K de X, l'ensemble

$$\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$$

est fini.

Montrer que si l'action de Γ sur X est libre et proprement discontinue, alors il existe une unique structure de variété sur le quotient X/Γ telle que la projection canonique $\pi : X \to X/\Gamma$ est un difféomorphisme local.

Solution :

Montrons d'abord que l'espace quotient est séparé. Soient x et y dans des orbites distinctes. Si U_x et U_y sont des voisinages ouverts de x et y relativement compacts, on peut appliquer la définition d'une application proprement discontinue à l'adhérence de $U_x \cup U_y$, ce qui montre que U_x ne rencontre qu'un nombre fini de translatés de U_y. Notons $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ les éléments de Γ tels que $U_x \cap \gamma_i U_y \neq \emptyset$. Comme x n'est pas dans l'orbite de y, il existe des voisinages ouverts U_x^i et U_y^i de x et y tels que $U_x^i \cap \gamma_i U_y^i = \emptyset$. On pose $U = U_x \cap \bigcap_i U_x^i$ et $V = U_y \cap \bigcap_i U_y^i$. Alors par construction, U et V sont des voisinages ouverts de x et y dont les translatés sous Γ ne s'intersectent pas. Ceci prouve la séparation du quotient. (on utilise pas la liberté de l'action ici)

L'unicité est automatique, vue la condition demandée sur π (l'écrire !). Montrons que π est localement injective : sinon, il existe x un point de X tel que pour tout voisinage ouvert U de x, il existe x_1, x_2 distincts tels que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Donc, il existe $g \neq e$ dans Γ tel que $g.x_1 = x_2$. De plus, en appliquant l'hypothèse d'une action proprement discontinue, les g apparaissant vivent dans un sous-ensemble fini de Γ, dès que les voisinages ouverts U de x sont dans un compact fixé K. On considère alors deux suites de points x_1^n et x_2^n tendant vers x tels que $g.x_1^n = x_2^n$ où g est désormais fixé et différent de l'élément neutre. Par continuité, $g.x = x$, ce qui contredit la liberté de l'action.

Soit y dans X/Γ et soit x tel que $\pi(x) = y$. On choisit un voisinage ouvert U de x tel que $\pi_{|U}$ est injective. Alors π induit un homéomorphisme de U vers l'ouvert $\pi(U)$ dans X/Γ. Ceci définit une carte au voisinage de y (quitte à repasser à $\mathbb{R}^n$ en utilisant une carte de X). Montrons que ces cartes sont compatibles. On considère deux ouverts V_1 et V_2 dans X/Γ, de la forme $\pi(U_1)$, $\pi(U_2)$, où U_1 et U_2 sont des ouverts de X tels que la restriction de π à U_i induise un homéomorphisme de U_i vers V_i. Si V_1 et V_2 ne s'intersectent pas, il n'y a rien à montrer. S'ils s'intersectent, on note $\pi_i := \pi : U_i \to V_i$ de sorte qu'il s'agit de vérifier que f_{12} définie de $\pi_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ dans $\pi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$, par $f_{12}(u) = \pi_2^{-1} \circ \pi_1(u)$ est un difféomorphisme.

Soit u dans $\pi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) = U_1 \cap \pi_1^{-1}(V_2)$. Alors il existe g dans G tel que $g.u$ soit dans U_2. Alors, $f_{12}(u) = g.u$. De plus, comme $g.U_1 \cap U_2$ est un ouvert non vide, l'égalité est vraie sur un voisinage de u dans $U_1 \cap \pi_1^{-1}(V_2)$. Donc, f_{12} est localement donnée par $u \mapsto g.u$ qui est un difféomorphisme par hypothèse. Donc, on a bien défini une structure de variété sur X/Γ ; π est un difféomorphisme local par construction.

4. Exemples de quotients

On considère les actions suivantes du groupe $\mathbb{Z}$ sur une variété X, engendrées par le difféomorphisme f de X. Déterminer dans quels cas l'action est libre et proprement discontinue. Identifier le quotient quand c'est le cas.

Dans le cas contraire, le quotient est-il séparé ? Localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$?

1– $X = \mathbb{R}^{+*}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

2– $X = \mathbb{R}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

3– $X = \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

4– $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(x,y) = (2x, y/2)$.

Solution :

1– L'application logarithme $X = \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ montre que cet exemple est isomorphe à l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation de $\ln(2)$. L'action est donc libre et proprement discontinue, et le quotient est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$.

2– L'action n'est pas libre : 0 est un point fixe. Notons π l'application quotient. Comme $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}x = 0$, on voit que $\pi(0)$ est dans l'adhérence de $\{\pi(x)\}$. Cette bizarrerie montre que le quotient n'est pas séparé et ne peut être localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

3– L'application $\psi : \mathbb{R}^N \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^{N-1}$ telle que $\psi(x) = (||x||, \frac{x}{||x||})$ est un difféomorphisme, car c'est une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de réciproque $\mathcal{C}^\infty$: $(x,y) \mapsto xy$. En transportant l'action de $\mathbb{Z}$ par ce difféomorphisme, on se ramène au cas où $X = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^{N-1}$ et f est une homothétie de rapport 2 sur la première coordonnée. En utilisant la première question, on voit que l'action est libre et proprement discontinue et que le quotient est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{N-1}$.

4– On vérifie aisément que l'action est libre. En revanche, si K est le segment joignant $(0,1)$ à $(1,0)$, $f^{(n)}(K)$ est le segment joignant $(0, \frac{1}{2^n})$ à $(2^n, 0)$. Un dessin (ou un calcul facile) montre que ces deux segments s'intersectent toujours : le compact K est d'intersection non vide avec tous ses conjugués. Par conséquent l'action n'est pas proprement discontinue.

On note toujours π l'application quotient. Le quotient n'est pas séparé : comme les points $(\frac{1}{2^n}, 1)$ et $(1, \frac{1}{2^n})$ sont dans la même orbite, on voit que les points $\pi(0,1)$ et $\pi(1,0)$ ne sont pas séparés dans le quotient.

En revanche le quotient est localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, on vérifie que tout point $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a un voisinage U qui n'intersecte aucun de ses conjugués : on peut prendre par exemple $U = B(x, \max(|x_1|/4, |x_2|/4))$. Ainsi, le voisinage $\pi(U)$ de $\pi(x)$ dans le quotient est isomorphe à U, donc à un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

5. Encore un quotient

On fait agir le groupe $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ par rotation d'angle $2k\pi/n$.

1– Étudier cette action.

2– Munir le quotient $\mathbb{R}^2/\Gamma$ d'une structure de variété, qui le rend difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

3– Que dire de la projection $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$?

Solution :

1– L'action n'est pas libre : 0 est point fixe de tout le groupe. Elle est proprement discontinue puisque Γ est fini.

2– On considère $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $x \mapsto x^n$. Cette application passe au quotient au départ, et donne ainsi une application continue (pour la topologique quotient) $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^2/\Gamma \to \mathbb{R}^2$. Il est clair que $\widetilde{\varphi}$ est une bijection ; on montre aisément que c'est un homéomorphisme en remarquant que φ (et donc $\widetilde{\varphi}$) est une application ouverte. On munit alors $\mathbb{R}^2/\Gamma$ d'une structure de variété dont l'unique carte est $\widetilde{\varphi}$.

3– Par définition de la structure de variété, une application $f : M \to \mathbb{R}^2/\Gamma$ est lisse si, et seulement si $\widetilde{\varphi} \circ f : M \to \mathbb{R}^2$ est lisse. En particulier, p est lisse car, par définition, $\widetilde{\varphi} \circ p = \varphi$ qui est lisse. De même, p n'est pas une submersion car φ n'est pas une submersion.

Bilan : on a muni le quotient d'une structure de variété qui n'est pas vraiment une structure de variété quotient ; en effet, dans le cas usuel où l'on quotiente par un groupe discret, la projection est un revêtement, donc en particulier un difféomorphisme local. En revanche, la topologie de la variété quotient coïncide avec la topologie quotient.

6. Grassmanniennes

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n et $0 \leqslant k \leqslant n$ un entier. On note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V. L'objet de cet exercice est de munir cet ensemble d'une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$ compacte.

Si B est un sous-espace vectoriel de dimension $n-k$ de V, on note U_B le sous-ensemble de $\mathcal{G}_k(V)$ constitué des supplémentaires de B. Soit A un supplémentaire de B. On note $\mathcal{L}(A, B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B. On définit

$$\begin{aligned} \psi_{A,B} : \mathcal{L}(A,B) &\to U_B \\ f \quad &\mapsto (\mathrm{Id} + f)(A) \end{aligned}$$

1– Montrer que $\psi_{A,B}$ est bien définie et bijective.

2– Montrer que le domaine de définition et l'image de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(A, B)$ et de $\mathcal{L}(A', B')$. Montrer que $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de son domaine de définition sur son image.

3– Montrer qu'il existe une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ telle que les U_B soient des ouverts et les $\psi_{A,B}$ des homéomorphismes. Vérifier que $\mathcal{G}_k(V)$ est séparé pour cette topologie.

4– Montrer que les $\psi_{A,B}$ forment un atlas munissant $\mathcal{G}_k(V)$ d'une structure de variété $\mathcal{C}^\infty$.

5– Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est compacte.

Solution :

1– L'application $\psi_{A,B}$ associe à $f : A \to B$ son graphe dans $V = A \oplus B$. La projection π_A sur A parallèlement à B réalise un isomorphisme entre le graphe et A : celui-ci est bien de dimension k. D'autre part, son intersection avec B est $\{0\}$, de sorte que $(\mathrm{Id}+f)(A) \in U_B$ et que $\psi_{A,B}$ est bien définie.

Comme une fonction est déterminée par son graphe, $\psi_{A,B}$ est injective.

Enfin, soit $C \in U_B$. Comme $C \cap B = \{0\}$, la projection $\pi_A|_C : C \to A$ sur A parallèlement à B est injective, donc un isomorphisme par dimension. Notant π_B la projection sur B parallèlement à A, on vérifie aisément que C est le graphe de $\pi_B \circ (\pi_A|_C)^{-1} : A \to B$. Ceci montre la surjectivité de $\psi_{A,B}$.

2– Le domaine de définition W de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est l'ensemble des $f : A \to B$ dont le graphe est un supplémentaire de B'. Si (a_i) et (b'_j) sont des bases de A et B', cette condition s'écrit $\det((a_i, f(a_i)), b'_j)_{i,j} \neq 0$, ce qui montre que W est ouvert. On montre de même que l'image de $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A', B')$.

Il suffit pour conclure de montrer que $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine de définition W : en effet, le même raisonnement montrera que sa réciproque est $\mathcal{C}^\infty$, donc que c'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Pour cela, fixons $x \in A'$ et montrons que $y = \psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}(f)(x)$ dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de $f \in W$. Or y est l'unique solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} \pi_{A'}(y) &= 0 \\ \pi_B(x+y) &= f(\pi_A(x+y)) \end{aligned}$$

Les formules de Cramer montrent alors que y dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ des coefficients de ce système, donc de f.

3– On prend pour ouverts les $U \subset \mathcal{G}_k(V)$ tels que pour tout $A \in \mathcal{G}_k(V)$ et pour tout supplémentaire B de A, $\psi^{-1}_{A,B}(U \cap U_B)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Cela définit bien une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$.

Comme les $\psi^{-1}_{A',B'} \circ \psi_{A,B}$ sont des homéomorphismes, on vérifie que les ouverts inclus dans U_B sont exactement les sous-ensembles de la forme $\psi_{A,B}(V)$ pour V ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Ainsi, U_B est ouvert et $\psi_{A,B}$ est un homéomorphisme.

Soit $A, A' \in \mathcal{G}_k(V)$. On peut trouver un supplémentaire commun B à A et A' de sorte que $A, A' \in U_B$. Comme U_B est séparé, on peut trouver deux ouverts de U_B séparant A et A'. $\mathcal{G}_k(V)$ est donc bien séparé.

4– C'est une conséquence immédiate des deux questions précédentes.

5– On introduit E l'ouvert de V^k constitué des familles libres et $g : E \to \mathcal{G}_k(V)$ l'application qui associe à une famille libre l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrons que g est continue. Vu la définition de la topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$, il suffit de montrer que $V_B = g^{-1}(U_B)$ est ouvert et que $g|_{V_B} : V_B \to U_B$ est continue.

Pour le premier point, choisissons une base (b_j) de B. Alors $(v_i) \in E$ appartient à V_B si et seulement si $\det(v_i, b_j)_{i,j} \neq 0$, ce qui est bien une condition ouverte.

Pour le second point, il suffit de montrer que $\psi^{-1}_{A,B} \circ g|_{V_B}$ est continue. Fixons $x \in A$ et soit $(v_i) \in V_B$. Alors $\psi^{-1}_{A,B} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ est l'unique solution en y du système d'équations linéaires à $n+k$ équations et $n+k$ inconnues y et λ_i suivant :

$$\begin{aligned}\pi_A(y) &= 0\\ x+y &= \sum_i \lambda_i v_i\end{aligned}$$

Les formules de Cramer montrent alors que $\psi_{A,B}^{-1} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ dépend de manière continue des coefficients de ce système, donc des v_i. Cela montre la continuité de g.

On peut alors conclure. Fixons un produit scalaire sur V. Si K est l'ensemble des familles orthonormales, K est compact car fermé borné dans V^k et $\mathcal{G}_k(V) = g(K)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.