

TD 7 : Théorème d'arrêt et convergence des martingales

Mercredi 24 Octobre

1 Théorème d'arrêt, vaisseaux spatiaux et chimpanzés

Exercice 1 (Marche aléatoire biaisée)

Soit $p > \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur \mathbb{Z} , i.e. $S_n = X_1 + \dots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.
2. Soient $a, b \geq 1$ et soit $T = \min\{n \geq 0 \mid S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$. Calculer $\mathbb{P}(S_T = -a)$.
3. En déduire la loi de $\min\{S_n \mid n \geq 0\}$.

Exercice 2 (Vaisseau spatial perdu)

Le *Millenium Falcon* se trouve à une distance D_0 du Soleil mais ses commandes ne répondent plus : toutes les heures, Han Solo ne peut qu'entrer une distance R_n inférieure à la distance au Soleil dans l'ordinateur de bord, qui effectue alors un saut dans l'hyperespace de longueur R_n et de direction choisie uniformément dans la sphère S^2 . On note D_n la distance du vaisseau au Soleil après n sauts et \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les n premiers sauts. Han Solo veut revenir dans le système solaire, c'est-à-dire à distance au plus d du Soleil.

1. En utilisant des souvenirs de physique de prépa (théorème de Gauss), montrer que $\left(\frac{1}{D_n}\right)$ est une martingale.
2. En déduire que la probabilité que Han Solo revienne un jour dans le système solaire est inférieure ou égale à $\frac{d}{D_0}$.
3. A la place du pilote, feriez-vous plutôt de grands ou de petits sauts ?

Exercice 3 (Le singe et la machine à écrire)

Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de

l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot "ABRACADABRA". Le but de l'exercice est de calculer $\mathbb{E}[T]$. Pour cela, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \dots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement

{la n -ième lettre tapée par l'animal est un "A"}.

Si il perd, il part (et le singe met 1 banane dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 bananes du singe, qu'il remise immédiatement sur l'événement

{la $n + 1$ -ième lettre tapée par l'animal est un "B"}.

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

{la $n + 2$ -ième lettre tapée par l'animal est un "R"}.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe.

1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps n est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, où \mathcal{F}_n est la tribu engendrée par les n premières lettres tapées par l'animal.
2. En déduire

$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commenter.

2 Convergence des martingales

Exercice 4 (Exemples et contre-exemples)

1. Trouver un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans L^1 .
2. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans L^1 .
3. Trouver un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.
4. Trouver un exemple de martingale bornée dans L^1 mais qui ne converge pas dans L^1 .

Exercice 5 (Urne de Polya)

À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule uniformément et on la remplace par deux boules de sa couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n . Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U , et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
3. Cas $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n + 1\}$. En déduire la loi de U .
4. Cas général. On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n + 1) \dots (Y_n + k - 1)}{(N_0 + n)(N_0 + n + 1) \dots (N_0 + n + k - 1)}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.

5. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur \mathbb{R} (on exhibera le développement en série entière). Expliquer pourquoi on a caractérisé la loi de U .

Exercice 6 (Théorème de Rademacher)

Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \quad \text{et} \quad Z_n = 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n) \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1}) | X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F}_n -martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
3. Montrer que (Z_n) converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire Z , puis qu'il existe une fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$ p.s..
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X) | X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s. :

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u) du$.

Exercice 7 (Processus de Galton–Watson surcritique)

Soit μ une loi sur \mathbb{N} telle que $\sum_i i \mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2 \mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ . On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n} X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞ .
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \rightarrow M_\infty$ dans L^2 .
5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q . En déduire que $q = p$. Qu'est-ce que cela signifie sur la croissance de X_n ?

3 Jolie image

Exercice 8

Que représente la jolie image ci-dessous ?

