TD 8 – Dualité $L^p - L^q$, transformation de Fourier

1 – Dualité $L^p - L^q$

Exercice 1. (*Séquentielle compacité faible-**) Soit $p \in]1,\infty]$, $q \in [1,\infty[$ son exposant conjugué, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et λ la mesure de Lebesgue. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ (c'est-à-dire que la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée).

1.(a) On note $\mathcal{E}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\Omega \to \mathbb{R}$ qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'indicatrices de pavés bornés inclus dans Ω. Montrer que $\mathcal{E}(\Omega)$ est dense dans $L^q(\Omega)$.

(b) Montrer que $L^q(\Omega)$ est séparable (c'est-à-dire qu'il contient une partie dénombrable dense).

2. Soit D une partie dénombrable dense de $L^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une extractrice $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $h \in D$,
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h \,\mathrm{d}\lambda \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

3. Montrer que pour tout $g \in L^q(\Omega)$,
$$\phi(g) := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

4. En déduire qu'il existe $f \in L^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible-** dans $L^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, c'est-à-dire :
$$\forall g \in L^q(\Omega), \int_\Omega f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\lambda.$$

5. Le résultat précédent subsiste-t-il pour $p = 1$?

Corrigé.

1.(a) Comme $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, il suffit de montrer que l'on peut approcher $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ dans L^p par des fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$. On considère donc $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, on note $K := \operatorname{supp} f$ et on considère ω un ouvert borné tel que $K \subset \omega \subset \Omega$.
Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $n \geq 1$, on note
$$P_n(x) := \prod_{i=1}^d \left[x_i, x_i + \frac{1}{n}\right[,$$
puis $Z_n := (1/n)\mathbb{Z}^d \cap \omega$ et enfin on définit la fonction
$$f_n := \sum_{z\in Z_n \text{ tel que } P_n(z)\subset\omega} f(z)\mathbb{1}_{P_n(z)}$$
qui appartient bien à $\mathcal{E}(\Omega)$ car Z_n est fini (car ω est borné). On a $\operatorname{supp} f_n \subset \omega$ et $K \subset \omega$, donc
$$\begin{aligned}\|f - f_n\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\omega |f - f_n|^p \,\mathrm{d}\lambda &= \sum_{z\in Z_n} \int_{P_n(z)} |f(x) - f_n(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{z\in Z_n \text{ tel que } P_n(z)\subset\omega \text{ ou } P_n(z)\cap K\neq\emptyset} \int_{P_n(z)} |f(x) - f_n(x)|^p \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

car sur les autres pavés $P_n(z)$, f et f_n sont nulles. À partir d'un certain rang, on a pour $z \in Z_n$, $P_n(z) \cap K \neq \emptyset \Rightarrow P_n(z) \subset \omega$ (il suffit de considérer n tel que $1/n < d_\infty(K, \omega^c)$). Alors on a

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_{L^p(\Omega)}^p &= \sum_{z \in Z_n \text{ tel que } P_n(z) \subset \omega} \int_{P_n(z)} |f(x) - f_n(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{z \in Z_n \text{ tel que } P_n(z) \subset \omega} \lambda(P_n(z)) \sup_{x,y \in \Omega, |x-y| \leq 1/n} \left|f(x) - f(y)\right|^p \\
&\leq \lambda(\omega) \left(\sup_{x,y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq (b-a)/n} \left|f(x) - f(y)\right| \right)^p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,
\end{aligned}$$

car f est uniformément continue sur Ω et $\lambda(\omega) < \infty$ car ω est borné. Donc $f_n \to f$ dans L^p et ceci conclut la démonstration.

(b) On définit

$$\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}(\Omega) := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{P_i} : n \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{Q}, P_i \text{ pavé borné à coordonnées rationnelles} \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$ est dénombrable et dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$ pour la norme $\|-\|_p$ donc dense dans $L^q(\Omega)$ par la question précédente.

2. On utilise un procédé d'extraction diagonal. On commence par numéroter toutes les fonctions de D : $D = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Considérons h_0. Par Hölder, la suite

$$\left(\int f_n h_0 \,\mathrm{d}\lambda \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est bornée par $\|h_1\|_q \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p$, donc, comme il s'agit d'une suite de réels, il existe une extractrice ψ_0 telle que $\int f_{\psi_0(n)} h_0 \,\mathrm{d}\lambda$ converge.
Ainsi, par récurrence, on construit une suite d'extractrices $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int f_{\psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k(n)} h_k \,\mathrm{d}\lambda \text{ converge quand } n \to \infty.$$

On définit

$$\varphi(n) := \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_n(n).$$

Alors, pour tout $n > k$, il existe $M \geq n$ tel que $\varphi(m) = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k(M)$ et donc $\int f_{\varphi(n)} h_k \,\mathrm{d}\lambda$ converge quand $n \to \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Le plus simple pour montrer que la suite $\int f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda$ converge est de montrer qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $h \in D$ telle que $\|g - h\|_q < \varepsilon$. Soient $n, m \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| \int f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda - \int f_{\varphi(m)} g \,\mathrm{d}\lambda \right| \\
&\leq \left| \int f_{\varphi(n)} (g - h) \,\mathrm{d}\lambda \right| + \left| \int f_{\varphi(m)} (g - h) \,\mathrm{d}\lambda \right| + \left| \int f_{\varphi(n)} h \,\mathrm{d}\lambda - \int f_{\varphi(m)} h \,\mathrm{d}\lambda \right|.
\end{aligned}$$

Par Hölder les deux premiers termes sont inférieurs à $(\sup \|f_n\|_p)\varepsilon$ et comme la suite $\int f_{\varphi(n)} h \,\mathrm{d}\lambda$ converge (par la question précédente) elle est de Cauchy, donc il existe n_0 tel que si $n, m > n_0$,

$$\left| \int f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda - \int f_{\varphi(m)} g \,\mathrm{d}\lambda \right| < (2 \sup \|f_n\|_p + 1)\varepsilon,$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy.

4. À la question précédente, on a défini une fonction $\phi\colon L^q \to \mathbb{R}$ qui est clairement linéaire. En outre, par Hölder, pour tout $g \in L^q$, $\phi(g) \leq (\sup\|f_n\|_p)\|g\|_q$ donc ϕ est une forme linéaire continue sur L^q. Or $q \in [1,\infty[$, donc le dual topologique de L^q est L^p. Ainsi, il existe $f \in L^p$ telle que

$$\forall g \in L^q(\Omega), \phi(g) = \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\lambda,$$

ce qui donne le résultat souhaité.

5. Non, le résultat n'est plus vrai pour $p = 1$: prenons la suite de fonction $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ qui est bien bornée dans L^1, et supposons qu'il existe une extractrice φ et une fonction $f \in L^1$ telle que pour toute fonction $g \in L^\infty$, $\lim \int f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda = \int f g \,\mathrm{d}\lambda$. Regardons des fonctions particulières :
   - ▹ la fonction $g = \mathbb{1}_\mathbb{R}$, montre que $\int_\mathbb{R} f \,\mathrm{d}\lambda = 1$;
   - ▹ la suite de fonction $g_k = \mathbb{1}_{[k,k+1]}$, montre que $\int_k^{k+1} f \,\mathrm{d}\lambda = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   Ces deux résultats sont contradictoires, ce qui conclut la preuve par l'absurde.

Exercice 2. (*Petit contre-exemple*) Soient $E = \{a,b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = \infty$. Caractériser $L^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $L^1(\mu)$. Conclure.

Corrigé. On a $L^\infty = \{f\colon E \to \mathbb{R}\}$ et $L^1 = \{f\colon E \to \mathbb{R} \mid f(b) = 0\}$. Donc le dual topologique de L^1 est $(L^1)' = \{f \in L^1 \mapsto \alpha f(a) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.
On voit ici que l'application $g \in L^\infty \mapsto \Phi_g \in (L^1)'$ (où $\Phi_g\colon f \in L^1 \mapsto \int_E f g d\mu$) est surjective mais pas injective. La mesure μ n'est pas σ-finie et le théorème de dualité (avec $p = 1$ et $q = +\infty$) ne s'applique pas dans ce cas.

2 – Transformation de Fourier

Exercice 3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa *transformée de Fourier* $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\xi) := \int_\mathbb{R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. (*Transformée de Fourier d'une gaussienne*) On considère la fonction

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

   (a) Montrer que $\xi \hat{f}(\xi) + \hat{f}'(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculer $\hat{f}$.

Corrigé.

1. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres, dont les hypothèses sont vérifiées :
   - ▹ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est mesurable ;
   - ▹ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (i.e. pour x tel que $|f(x)| < \infty$), $\xi \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est continue ;
   - ▹ pour tous $\xi, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}| \leq |f(x)|$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Donc $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. En outre, il est clair que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 < \infty$ donc $\hat{f}$ est bornée.

2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, dont les hypothèses sont vérifiées :
   - ▷ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
   - ▷ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (i.e. pour x tel que $|f(x)| < \infty$), $\xi \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\xi \mapsto -ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$;
   - ▷ pour tous $\xi, x \in \mathbb{R}$,
   $$\left|\frac{\partial}{\partial \xi}(f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x})\right| \leq |xf(x)|$$
   et la fonction $x \mapsto |xf(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Donc $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $\xi \in \mathbb{R}$,
   $$\hat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = -i \cdot \widehat{xf(x)}(\xi).$$

3. (a) Il est clair que $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\hat{f}$ est dérivable et, pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}(\xi\hat{f}(\xi) + \hat{f}'(\xi)) &= \int_{\mathbb{R}} (\xi - ix)\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = -i\mathrm{e}^{\xi^2/2}\int_{\mathbb{R}}(x+i\xi)\mathrm{e}^{-(x+i\xi)^2/2}\,\mathrm{d}x \\ &= i\mathrm{e}^{\xi^2/2}\left[\mathrm{e}^{-(x+i\xi)^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0.\end{aligned}$$

   (b) On veut résoudre l'équation différentielle linéaire du 1er ordre $y' + xy = 0$. Une solution évidente est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$, donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\hat{f}(\xi) = c\mathrm{e}^{-\xi^2/2}$. En outre, on a
   $$c = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x = 1,$$
   donc on en conclut que $\hat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$.

Exercice 4. (*Lemme de Riemann-Lebesgue*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\hat{f}(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0.$$

Indication. On pourra utiliser la densité des fonctions en escaliers à support compact dans $L^1(\mathbb{R})$.

Corrigé. Soit $\varepsilon > 0$. Soit g une fonction en escalier à support compact telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$. Quitte à modifier les bornes des intervalles (ce qui ne change pas $\|f - g\|_1$), on peut supposer que g est de la forme
$$g = \sum_{k=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{[a_i, b_i[},$$
avec $n \geq 1$, $c_i \in \mathbb{R}$ et $a_i < b_i$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a
$$\hat{g}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} c_i \int_{a_i}^{b_i} \mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} c_i \frac{\mathrm{e}^{-i\xi a_i} - \mathrm{e}^{-i\xi b_i}}{i\xi} \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0.$$
Ainsi, on a
$$\limsup_{|\xi|\to\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \limsup_{|\xi|\to\infty} \left(|\hat{g}(\xi)| + \left|\widehat{f-g}(\xi)\right|\right) \leq 0 + \|f - g\|_1 \leq \varepsilon.$$
En faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat souhaité.

Exercice 5. (*Transformation de Fourier et convolution*)

1. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.
2. En déduire que $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour la convolution.
3. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac. Montrer que $\widehat{\varphi_n}$ converge simplement vers 1 quand $n \to \infty$.

Corrigé.

1. Par définition on a
$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ix\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-i(x-y)\xi}\mathrm{e}^{-iy\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$
Puisque $\int\int |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$, le théorème de Fubini s'applique et le changement de variable $x - y = z$ donne le résultat escompté.
2. Si $e \in L^1$ est un élément neutre pour la convolution alors pour tous $f \in L^1$ et $\xi \in \mathbb{R}$
$$\hat{f}(\xi)\hat{e}(\xi) = \widehat{f*e}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$
Or, par la question 3. de l'exercice 3, il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. On en déduit donc que $\hat{e}(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Cela contredit le lemme de Riemann-Lebesgue (exercice 4).
3. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}\left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)(\mathrm{e}^{-i\xi x} - 1)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\left|\mathrm{e}^{-i\xi x} - 1\right|\mathrm{d}x \\ &\le \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_n(x)|\xi|\varepsilon\,\mathrm{d}x + \int_{B(0,\varepsilon)^c} \varphi_n(x) 2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$
pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que
$$\limsup_{n\to\infty} \left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right| \le |\xi|\varepsilon,$$
ce qui conclut avec $\varepsilon \to 0$.

3 – Compléments (hors TD)

Rappels. On pourra utiliser les résultats suivants, montrés dans les exercices 5 et 6 du TD 7.

- Soit $p \in [1, \infty[$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac dans $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * \varphi_n \to f$ dans L^p quand $n \to \infty$.
- Pour $p \in [1, \infty[$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on peut choisir la suite pour approcher f sous la forme $f_n = (f \mathbb{1}_{K_n}) * \varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac de classe C^∞ à support compact et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de compacts telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \mathbb{R}^d$.

Exercice 6. (*Injectivité et inversion de Fourier*)

1. Pour $\sigma > 0$, on définit
$$g_\sigma : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}.$$
En utilisant la question 3. de l'exercice 3, calculer $\widehat{g_\sigma}$.

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tous $\sigma > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(g_\sigma * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

3. (*Injectivité de Fourier*) Montrer que la transformation de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R})$.
4. (*Formule d'inversion de Fourier*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Remarque. L'égalité est vraie partout si et seulement si f est continue.

Corrigé.

1. Pour $\sigma > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{g_\sigma}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-i\xi\sigma y}\, \mathrm{d}y = \widehat{g_1}(\sigma\xi) = \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{1/\sigma}(\xi),$$

avec le changement de variable $y = x/\sigma$.

2. Pour $\sigma > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant la question 1.,

$$\begin{aligned}(g_\sigma * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2\sigma^2} f(x-y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \widehat{g_{1/\sigma}}(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-iy\xi}\, \mathrm{d}\xi \right) f(x-y)\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) \mathrm{e}^{-i(x-y)(-\xi)}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{-ix\xi}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-\xi) \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{-ix\xi}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini-Lebesgue, car on a bien $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{-iy\xi} f(x-y)|\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\xi = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}\, \mathrm{d}\xi < \infty$.

3. Soit $f, h \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $\hat{f} = \hat{h}$. Alors, par la question 2., pour tout $\sigma > 0$, on a $g_\sigma * f = g_\sigma * h$. Or, il est aisé de vérifier que $(g_\sigma)_{\sigma>0}$ est une approximation de Dirac (quand $\sigma \to 0$). Comme $f \in L^1$, on a $g_\sigma * f \to f$ dans L^1 quand $\sigma \to 0$, par l'exercice 5 du TD 7. De même, $g_\sigma * f = g_\sigma * h \to h$ dans L^1 et donc $f = h$ dans L^1.

4. Par la question 2. de nouveau, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(g_\sigma * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

par convergence dominée (la convergence λ-p.p. est claire et on domine par $|\hat{f}| \in L^1$). Ainsi, $g_\sigma * f$ converge vers f dans L^1 et vers $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi$ simplement donc les deux limites coïncident presque partout (cf petite question 3. du TD 4).

On peut écrire cela sous la forme plus synthétique : pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x)$.

Exercice 7. (*Espace de Schwartz*) On définit l'*espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$x^n f^{(k)}(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0.$$

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Exprimer $\widehat{f'}$ en fonction de $\hat{f}$.
2. Montrer que la transformation de Fourier est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Corrigé.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Comme $f' \in L^1$, on a, par convergence dominée (domination par $|f'|$),

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(\xi) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-i\xi x} f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left[\mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\right]_{-n}^{n} + \int_{-n}^{n} i\xi \mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-i\xi n} f(n) - \mathrm{e}^{i\xi n} f(-n) + i\xi \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Montrons à présent que $f(n) \to 0$ quand $n \to \infty$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[x\to\infty]{} \int_0^\infty f'(y)\,\mathrm{d}y,$$

donc f admet une limite en $+\infty$. Mais si cette limite est non nulle, cela contredit l'intégrabilité de f donc cette limite est 0. Ainsi, $f(n) \to 0$ et de même $f(-n) \to 0$. En revenant au premier calcul, on obtient $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$.

2. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrons que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Montrons par récurrence que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{H}_k : \hat{f} \text{ est } k \text{ fois dérivable et } \hat{f}^{(k)} = (-i)^k \widehat{x^k f},$$

où $\widehat{x^k f}$ est la transformée de Fourier de $x \mapsto x^k f(x)$. L'hypothèse $\mathcal{H}_0$ est clairement vraie. Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $x \mapsto x \cdot x^k f(x)$ est intégrable et donc par la question 2. de l'exercice 3, $\widehat{x^k f}$ est dérivable donc $\hat{f}$ est $k+1$ fois dérivable et

$$\hat{f}^{(k+1)} = (-i)^k \widehat{x^k f}' = (-i)^{k+1} \widehat{x^{k+1} f},$$

donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
Montrons à présent que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\hat{f}^{(k)}$ décroît plus que polynomialement en l'infini. Par ce qui précède, il suffit de le montrer pour $\widehat{g_k}$ où $g_k \colon x \mapsto x^k f(x)$. Il est clair que $g_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car toutes ses dérivées sont une somme de produits entre un polynome et une dérivée de f. En particulier toutes ses dérivées sont dans L^1, donc en itérant la question précédente, on a, pour tous $n \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g_k^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \widehat{g_k}(\xi).$$

Comme la transformée de Fourier d'une fonction L^1 est bornée, on en déduit que pour tout $n \geq 0$,

$$\xi \mapsto |\xi|^n \widehat{g_k}(\xi) \text{ est bornée.}$$

Mais, en l'appliquant à $n+1$, cela nous donne

$$|\xi|^n \widehat{g_k}(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\widehat{g_k}$ et donc $\hat{f}^{(k)}$ décroissent plus que polynomialement en l'infini. Cela montre que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. La transformation de Fourier définit bien une application $\widehat{\cdot} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Il est clair que $\widehat{\cdot}$ est linéaire. En outre, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, donc, par la formule d'inversion de Fourier, on a $f(x) = ((\widehat{\cdot})^2 f)(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $(\widehat{\cdot})^4 = \mathrm{id}$ et donc $\widehat{\cdot}$ est inversible : c'est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 8. (*Transformation de Fourier L^2*)

1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} f \hat{g} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g \,\mathrm{d}\lambda.$$
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2.$$
3. Montrer que l'on peut étendre la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ en un automorphisme $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F} f\|_2$.

Corrigé.

1. On a, en appliquant le théorème de Fubini-Lebesgue à $(x, \xi) \mapsto f(\xi)g(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ qui est intégrable pour $\lambda \otimes \lambda$,
$$\int_{\mathbb{R}} f \hat{g} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} g(x)\left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g \,\mathrm{d}\lambda.$$
2. On applique la question précédente à $g = \bar{\hat{f}}$. Ainsi, on obtient
$$\|\hat{f}\|_2 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\bar{\hat{f}} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \hat{\bar{\hat{f}}} \,\mathrm{d}\lambda.$$
Or, pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\hat{\bar{\hat{f}}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{f}}(\xi)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi} = \overline{2\pi f(x)},$$
presque partout, d'après la formule d'inversion de Fourier. On a donc $\|\hat{f}\|_2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f\bar{f}\,\mathrm{d}\lambda = 2\pi\|f\|_2$.
3. On remarque tout d'abord que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ l'est (cf exercice 6 du TD 7) et est inclus dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors, pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a $f_n - f_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et donc $\widehat{f_n - f_m} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ (par la question 2. de l'exercice 7) et ainsi, par la question précédente, on a
$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|\widehat{f_n - f_m}\|_2 = 2\pi\|f_n - f_m\|_2.$$
Donc la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ donc converge dans L^2 (par complétude) vers une limite $h \in L^2(\mathbb{R})$.
Vérifions que cette fonction h ne dépend pas de la suite choisie pour approcher f. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $g_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. On a, en appliquant la question précédente à $g_n - f_n$,
$$\|\widehat{g_n} - h\|_2 \leq \|\widehat{g_n} - \widehat{f_n}\|_2 + \|\widehat{f_n} - h\|_2 = \|\widehat{g_n - f_n}\|_2 + \|\widehat{f_n} - h\|_2 = 2\pi\|g_n - f_n\|_2 + \|\widehat{f_n} - h\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Donc $(\widehat{g_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi dans L^2 vers $h \in L^2(\mathbb{R})$. On peut donc poser $\mathcal{F} f := h$ et cela définit une application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.
La linéarité de $\mathcal{F}$ est immédiate et on constate aussi que
$$\|\mathcal{F} f\|_2 = \lim_{n\to\infty}\|\widehat{f_n}\|_2 = \lim_{n\to\infty} 2\pi\|f_n\|_2 = 2\pi\|f\|_2.$$
Montrons que $\mathcal{F}$ est un automorphisme. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on a, par définition $\widehat{f_n} \to \mathcal{F} f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Or $\widehat{f_n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc
$$\widehat{\widehat{f_n}} \to \mathcal{F}\mathcal{F} f,$$

toujours par définition de $\mathcal{F}$. En itérant ce procédé, on obtient $(\widehat{\cdot})^4 f_n \to \mathcal{F}^4 f$, mais on a vu dans l'exercice 7 que $(\widehat{\cdot})^4 = \mathrm{id}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (conséquence de la formule d'inversion de Fourier). Par unicité de la limite dans L^2, on obtient $\mathcal{F}^4 f = f$ presque partout. Ainsi, $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}$ et $\mathcal{F}$ est inversible.

Enfin, si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, vérifions que $\mathcal{F}f = \hat{f}$. On a vu dans l'exercice 6 du TD 7 que, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac de classe C^∞ à support compact, il existe $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, $f_n := (f\mathbb{1}_{K_n}) * \varphi_n \to f$ dans L^2 et $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors par défnition, on a $\widehat{f_n} \to \mathcal{F}f$ dans L^2. D'autre part, on a

$$\widehat{f_n}(\xi) = \widehat{f\mathbb{1}_{K_n}}(\xi)\widehat{\varphi_n}(\xi),$$

par l'exercice 5. On a, par convergence dominée (domination par $|f| \in L^1$),

$$\widehat{f\mathbb{1}_{K_n}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{K_n}(x) f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\xi).$$

En outre, on sait par l'exercice 5, que $\widehat{\varphi_n}(\xi) \to 1$ donc on obtient que $\widehat{f_n}$ converge simplement vers $\hat{f}$. Ainsi $\mathcal{F} = \hat{f}$ presque partout (cf petite question 3. du TD 4).

Pour l'exercice suivant on rappelle ces quelques points :

- ▷ Une partie d'un espace topologique est dite *relativement compacte* lorsque son adhérence est compacte.
- ▷ Une partie d'un espace métrique est dite *précompacte* lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut la recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.
- ▷ *Théorème d'Arzelà-Ascoli.* Soit X un espace topologique compact, (Y, d) un espace métrique et A une partie de l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des fonctions continues de $X \to Y$ muni de la convergence uniforme. Alors A est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X, Y)$ si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :
  - (i) pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x) : x \in A\}$ est relativement compact dans Y ;
  - (ii) A est *équi-continue*, i.e. pour tout $x \in X$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\forall f \in A, \forall x' \in V, d(f(x), f(x')) \le \varepsilon.$$

- ▷ *Précompacité et complétude.* Soit (E, d) un espace métrique complet. Les parties $A \subset E$ relativement compactes sont exactement les parties précompactes.

Exercice 9. (*Riesz-Fréchet-Kolmogorov : un critère de compacité dans L^p*) Soit $d \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty[$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$, on note τ_h l'opérateur de translation défini par $\tau_h f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x-h)$ pour tout $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne.

On veut montrer le résultat suivant. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $L^p(\Omega)$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) l'ensemble $\mathcal{F}$ est borné dans $L^p(\Omega)$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \le \varepsilon$;

(iii) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $\delta \in]0, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)[$ tel que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$ pour tous $|h| < \delta$ et $f \in \mathcal{F}$.

La notation $\omega \subset\subset \Omega$ signifie que ω est un ouvert tel que $\overline{\omega}$ est compact et inclus dans Ω.

1. Supposons que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii). Soit $(\varphi_n)_{n\ge1}$ une approximation de Dirac telle que chaque φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de support inclus dans $B(0, 1/n)$ la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $1/n$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{f}$ la fonction f prolongée à tout $\mathbb{R}^d$ par 0.

(a) Soit $\omega \subset\subset \Omega$. En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, montrer que pour tout $n \geq 1$, la famille

$$\mathcal{F}_n := \{(\tilde{f} * \varphi_n)_{|\omega} \colon f \in \mathcal{F}\}$$

est relativement compacte dans $L^p(\omega)$.

(b) Soit $\omega \subset\subset \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout n assez grand,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tilde{f} * \varphi_n - f\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

(c) En déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de $L^p(\omega)$ de rayon 2ε.

(d) Montrer que $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

2. Supposons que $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$. Montrer que $\mathcal{F}$ vérifie (i), (ii) et (iii).

Corrigé.

1. Soit $M = \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega)}$ qui est une constante finie.

(a) Soit $n \geq 1$ fixé. On note $\mathcal{F}_n' = \{(\tilde{f} * \varphi_n)_{|\overline{\omega}} \colon f \in \mathcal{F}\}$. Tout d'abord on a $\mathcal{F}_n' \subset \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \overline{\omega}$, d'après l'inégalité de Jensen (appliquée à la mesure de probabilité $\varphi_n(y)dy$), on a

$$\left|\tilde{f} * \varphi_n(x)\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x-y)|^p \varphi_n(y)\, dy\right)^{1/p} \leq (\|\varphi_n\|_\infty)^{1/p} \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq (\|\varphi_n\|_\infty)^{1/p} M.$$

Donc $\mathcal{F}_n'$ est une famille bornée de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Et pour $x, x' \in \overline{\omega}$, on a

$$\begin{aligned}
|\tilde{f} * \varphi_n(x) - \tilde{f} * \varphi_n(x')| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)(\varphi_n(x-y) - \varphi_n(x'-y))dy\right| \\
&\leq \|\varphi_n'\|_\infty \cdot |x - x'| \cdot \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}|\, d\lambda \\
&\leq \|\varphi_n'\|_\infty \cdot |x - x'| \cdot \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \lambda(\Omega)^{1-1/p} \qquad \text{(Hölder)} \\
&= C_n |x - x'|.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}_n'$ est une famille équicontinue de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, $\mathcal{F}_n'$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$. Or pour $g \in \mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$, on a $g_{|\omega} \in L^p(\omega)$ et $\|g_{|\omega}\|_{L^p(\omega)} \leq (\lambda(\omega))^{1/p} \|g\|_\infty$. Donc l'injection de $\mathcal{C}(\overline{\omega}, \mathbb{R})$ dans $L^p(\omega)$ est continue. Ainsi, $\mathcal{F}_n$ est relativement compacte dans $L^p(\omega)$.

(b) Soit δ associé à ε et ω par la propriété (ii). Soit $n_0 \geq \delta^{-1}$. Pour $n \geq n_0$, $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \omega$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\tilde{f} * \varphi_n(x) - f(x)\right|^p &= \left|\int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{f}(x-y) - f(x)\right) \varphi_n(y)\, dy\right|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(x-y) - f(x)\right|^p \varphi_n(y)\, dy \qquad \text{(Jensen)} \\
&= \int_{B(0,1/n)} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_n(y)\, dy,
\end{aligned}$$

donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f} * \varphi_n - f\|_{L^p(\omega)}^p &\leq \int_\omega \int_{B(0,1/n)} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_n(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{B(0,1/n)} \left(\int_\omega |f(x-y) - f(x)|^p\, dx\right) \varphi_n(y)\, dy \\
&= \int_{B(0,1/n)} \|\tau_y f - f\|_{L^p(\omega)}^p \varphi_n(y)\, dy \\
&\leq \varepsilon^p \int_{B(0,1/n)} \varphi_n(y)\, dy = \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour $n \geq n_0$,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|\tilde{f} * \varphi_n - f\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon.$$

(c) La famille $\mathcal{F}_{n_0}$ est relativement compacte dans $L^p(\omega)$ donc on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε. D'après la question (b), ces mêmes boules de rayon 2ε recouvrent $\mathcal{F}$.

(d) Comme $L^p(\Omega)$ est complet, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors par la propriété (i), il existe $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} \leq \varepsilon/2$. Et d'après la question (1), $\mathcal{F}_{|\omega}$ peut être recouvert par des boules $B(g_i, \varepsilon/2), i = 1,\dots,k$ (de $L^p(\omega)$). On note G_i les fonctions g_i prolongées à Ω par 0. Alors les boules $B(G_i,\varepsilon), i = 1,\dots,k$ (de $L^p(\Omega)$) recouvrent $\mathcal{F}$.

2. L'adhérence de $\mathcal{F}$ est compacte donc bornée dans $L^p(\Omega)$ donc $\mathcal{F}$ vérifie (i).
Supposons que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (ii). Alors il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, on ait $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega)} > \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$\omega_n := \left\{x \in \mathbb{R}^d : \mathrm{dist}(x,\Omega^c) > \frac{1}{n}\right\} \cap B(0,n) \subset\subset \Omega.$$

Alors, il existe $f_n \in \mathcal{F}$ telle que $\|f_n\|_{L^p(\Omega\setminus\omega_n)} > \varepsilon$. Comme $\mathcal{F}$ est relativement compact, il existe une extraction φ et $f \in L^p(\Omega)$ telles que $f_{\varphi(n)} \to f$ dans $L^p(\Omega)$. Or, on a

$$\|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega_n)} = \int_\Omega |f|^p\, \mathbb{1}_{\Omega\setminus\omega_n}\, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

par convergence dominée (comme Ω^c est fermé, on a $\mathrm{dist}(x,\Omega^c) > 0$ ssi $x \in \Omega$, donc $\mathbb{1}_{\Omega\setminus\omega_n}$ converge simplement vers 0). Ainsi, on a

$$\|f_{\varphi(n)}\|_{L^p(\Omega\setminus\omega_{\varphi(n)})} \leq \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega_{\varphi(n)})} + \|f - f_{\varphi(n)}\|_{L^p(\Omega\setminus\omega_{\varphi(n)})} \leq \|f\|_{L^p(\Omega\setminus\omega_{\varphi(n)})} + \|f - f_{\varphi(n)}\|_{L^p(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui contredit le choix de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$. Donc $\mathcal{F}$ vérifie (ii).
Supposons que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (iii). Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\omega \subset\subset \Omega$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n \in]0, \mathrm{dist}(\omega,\Omega^c)[$, il existe $f_n \in \mathcal{F}$ et $|h_n| < 1/n$ tels que $\|\tau_{h_n} f_n - f_n\|_{L^p(\omega)} \geq \varepsilon$. Comme précédemment, on extrait de sorte que $f_{\varphi(n)} \to f$ dans $L^p(\Omega)$, donc dans $L^p(\omega)$. Mais, on a vu à l'exercice 3 du TD 7 que

$$\|\tau_h \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\|\tau_{h_n} f_n - f_n\|_{L^p(\omega)} &\leq \|\tau_{h_n} f_n - \tau_{h_n} f\|_{L^p(\omega)} + \|\tau_{h_n} f - f\|_{L^p(\omega)} + \|f - f_n\|_{L^p(\omega)} \\ &= 2\|f - f_n\|_{L^p(\omega)} + \|\tau_{h_n} f - f\|_{L^p(\omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

ce qui contredit le choix de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$. Donc $\mathcal{F}$ vérifie (iii).

Fin